SUPPLÉMENT

AU SECOND LIVRE

DU TRAITÉ DE TOPOGRAPHIE,

CONTENANT

LA THÉORIE DES PROJECTIONS DES CARTES ;

PAR L. PUISSANT,

Chef de Bataillon au Corps Impérial des Ingénieurs-Géographes, Membre de la Société Philomatique de Paris, etc.



PARIS,

Chez COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1810.

AVANT-PROPOS.

A l'époque où je rédigeais mon *Traité de Topographie, d'Arpentage et de Nivellement*, j'avais déjà senti la nécessité de donner plus de développement à quelques articles du second Livre de cet Ouvrage, qui est uniquement relatif à la projection des Cartes. Les circonstances dans lesquelles je me trouve maintenant, me faisant un devoir de m'occuper exclusivement de la Géodésie, dont l'enseignement à l'école d'Application des Ingénieurs-Géographes m'a été confié, j'ai pensé que je ferais une chose utile en traitant plus amplement diverses parties de cette science, et notamment la théorie relative à la projection que le Dépôt général de la Guerre a adoptée pour la réunion des levés topographiques. Cette projection connue sous le nom de *projection modifiée de Flamstéed* ou de *projection conique altérée*, a obtenu dans cet établissement la préférence sur toutes les autres, sans doute, parceque les longueurs dans le sens des parallèles et les aires quelconques y étant respectivement les mêmes que sur le globe terrestre, supposé même un ellipsoïde de révolution aplati vers les pôles, on peut, avec beaucoup de facilité et d'exactitude, estimer les distances itinéraires, et évaluer les surfaces sur toute Carte construite d'après cette projection ; avantage très-précieux pour le Militaire et l'Administrateur. J'aurais pu, il est vrai, sous

le rapport de la théorie, me dispenser de donner dans ce Supplément, la plupart des développemens en séries de plusieurs lignes du sphéroïde, vu qu'elles font le sujet du chapitre XI du livre III de ma *Géodésie*; mais comme la méthode que j'emploie ici est plus analogue à celle qui se pratique ordinairement en Astronomie, et qu'elle procure d'ailleurs des séries susceptibles d'être prolongées indéfiniment, parceque leurs termes se forment suivant une loi manifeste, j'ai cru devoir reprendre cette matière et la présenter avec toute la simplicité et l'élégance dont elle est susceptible; enfin je me suis surtout appliqué à ne laisser rien à desirer concernant les procédés graphiques relatifs à la construction des Cartes terrestres et marines.

SUPPLÉMENT

AU DEUXIÈME LIVRE

DU TRAITÉ DE TOPOGRAPHIE.

THÉORIE

DES PROJECTIONS DES CARTES.

CHAPITRE PREMIER.

Tracé de la projection modifiée de Flamstéed.

1. Lorsque les Géomètres se proposèrent de représenter sur un plan la surface du globe terrestre, ils imaginèrent différens systèmes de projection, soit pour altérer le moins possible la configuration des objets, soit pour mieux approprier les cartes aux usages auxquels elles étaient destinées: de là les *projections perspectives* et les *projections par développemens*. Les premières n'ont guère été mises en pratique que pour représenter un hémisphère entier, et ce sont encore les seules qu'on emploie aujourd'hui pour construire les mappemondes, quoiqu'il soit possible d'adopter à cet égard un mode de projection plus simple que celui qui dérive des lois de la perspective. Quant aux cartes chorographiques ou particulières, elles se construisent par développement, et selon qu'il s'agit, par exemple, d'y rendre les aires équivalentes à celles du globe qu'elles représentent, ou bien d'y

établir les méridiens parallèles entre eux, et d'y conserver toutefois les rapports entre les parties des méridiens et celles des parallèles, on fait usage de la *projection de Flamstéed* ou des *cartes réduites*. Dans la projection de cet Astronome, le méridien du milieu de la carte et tous les parallèles sont représentés par des lignes droites. Ces parallèles, perpendiculaires au méridien dont il s'agit, sont équidistans, parceque dans la sphère les arcs de méridien ayant même amplitude sont égaux, et leurs grades décroissent aussi proportionnellement aux cosinus des latitudes. Mais pour diminuer de beaucoup l'obliquité que prennent, vers les limites de la carte, tous les autres méridiens à l'égard des parallèles, on a pris le parti de figurer ces dernières lignes par des cercles concentriques, et de faire dépendre leur courbure de celle du parallèle *moyen*, c'est-à-dire de celui qui passe à peu près par le milieu de la carte, dont le centre est sur le méridien rectiligne, et qui a pour rayon la cotangente de sa latitude : telle est la modification faite à la projection de Flamstéed. C'est ainsi que la plupart des cartes particulières, et notamment celles des quatre parties du monde, ont été construites par Bonne et Delisle.

S'il était seulement question de faire connaître, sur ces cartes particulières, les positions géographiques des principaux lieux des Empires, il suffirait sans doute de considérer la terre comme sphérique; mais lorsque de telles cartes construites sur une grande échelle, sont destinées à représenter des détails topographiques levés avec précision et suivant le système de projection orthogonale, on doit nécessairement avoir égard à l'aplatissement de notre globe, supposé un ellipsoïde de révolution, si l'on veut éviter les erreurs qui résulteraient de l'autre hypothèse.

J'ai déjà indiqué le moyen d'atteindre ce but dans la projection modifiée de Flamstéed, qui est maintenant la seule en usage au Depôt général de la Guerre pour le rénnion des levés ; mais je me propose de donner, dans ce Supplément au livre II de ma *Topographie*, une théorie complette à ce sujet, et d'exposer en outre, avec tous les détails convenables, les procédés graphiques qui y sont relatifs; c'est pourquoi j'ai jugé convenable de rappeler d'abord quelques principes qui servent de fondement à cette théorie.

Construction des parallèles par un mouvement continu.

2. Si nous admettons qu'on puisse tracer les parallèles par un mouvement continu, c'est-à-dire à l'aide d'un compas, c'est supposer que le centre de ces courbes circulaires est situé sur la carte, ou du moins qu'il en est à peu de distance, et que parconséquent l'échelle de cette carte est très-petite. Dans cette hypothèse, soit A le centre du développement ; CX le méridien principal développé en ligne droite; AY la perpendiculaire à ce méridien, menée par le point A dont la latitude est supposée λ. Si à partir de ce point l'on prend sur CX la distance AC égale à la tangente du méridien elliptique, menée par le point dont la latitude est λ et terminée au petit axe, le point C sera le centre commun des parallèles. Ensuite, si sur cette même ligne CX on porte vers X et vers C des distances respectivement égales aux arcs d'un grade de latitude sur le sphéroïde de révolution, les latitudes des points de division a_2 a_1 A b_1 b_2 seront évidemment $\lambda+2$, $\lambda+1$, λ, $\lambda-1$, $\lambda-2$; donc les arcs a_2m_2, a_1m_1, AM, b_1n_1 b_2n_2 décrits respectivement des rayons Ca_2, Ca_1, CA, Cb_1, Cb_2 seront les projections des parallèles, et mAM sera celle du parallèle moyen. Fig. 1.

Maintenant, prenant sur chaque parallèle, des intervalles égaux entre eux et à ceux d'un grade du parallèle correspondant sur le globe terrestre, tous les nouveaux points de division, tels que m_2 m_1 M n_1 n_2 auront sur la carte même longitude, et la courbe qui passera par tous ces points représentera un méridien dont la longitude sera d'un grade par rapport au méridien principal CX. Pareillement la courbe h_2 h_1 h k_1 k_2 sera un méridien ayant 2 grades pour longitude, et ainsi de suite.

On reconnaît aisément, par cette construction, que les parties du méridien rectiligne et celles des parallèles ont entre elles les mêmes rapports que sur le sphéroïde : ainsi les distances prises sur ces lignes ne sont nullement altérées, mais les longueurs prises sur tout autre méridien ou suivant des directions différentes de celles des parallèles à l'équateur, sont d'autant moins exactes, qu'elles se trouvent être plus éloignées des axes des coordonnées AX, AY.

On voit en outre que, par la même raison, les angles des quadrilatères h, $h\ p\ p$, formés par deux méridiens et deux parallèles, diffèrent de plus en plus de l'angle droit; mais ces défauts ne commencent à être bien sensibles que loin du centre du développement; et il y a cela de remarquable, que les aires des quadrilatères sont rigoureusement proportionnelles à leurs projections, comme je l'ai déjà dit, et comme je le prouverai par la suite.

Construction par points, des méridiens et des parallèles.

3. Vu la difficulté et souvent même l'impossibilité de tracer des arcs de cercle d'un très-grand rayon, l'on a pris le parti de construire ces courbes par points, en les rapportant, pour plus de précision et de facilité, à des coordonnées rectangles. Sur les cartes gravées au Dépôt général de la Guerre, ou construites à l'échelle de $\frac{1}{10000}$, on y remarque les méridiens et les parallèles tracés de décigrades en décigrades; ces lignes ont une courbe si peu sensible, que les quadrilatères qu'elles forment peuvent être considérés comme rectilignes. Ainsi, pour construire le canevas d'une carte, il ne s'agit que de connaître les coordonnées rectangles des sommets des angles de ces quadrilatères; sauf ensuite, si le cas l'exige, à tracer les courbes des méridiens et des parallèles à l'aide d'une règle élastique dont l'usage est très-facile.

Mais le choix de l'origine des coordonnées n'est pas indifférent. En effet, la grande étendue de pays à figurer exige souvent que la carte soit composée de plusieurs feuilles : or pour leur donner des dimensions agréables à la vue, les rendre faciles à consulter, et les assujétir toutes au même format, on est convenu que chacune aurait huit décimètres de longueur sur cinq décimètres de hauteur. Ainsi en prenant d'abord pour origine des coordonnées le centre commun des parallèles, et pour axe des abscisses le méridien moyen de la carte, qui la traverse en son milieu, il est évident que cette origine est située hors de cette carte, et que souvent aussi le méridien principal est hors de la feuille à construire; il y a donc un peu plus d'avantage à prendre pour origine le centre du développement, c'est-à-dire le point du méridien rectiligne par lequel passe

passe le parallèle moyen. Cependant toutes les fois que les coordonnées des angles des quadrilatères excèdent les dimensions d'une feuille, il sera commode de transporter en outre l'origine à l'un des angles de la feuille sur laquelle on opère, et de prendre pour nouveaux axes des coordonnées les lignes mêmes du cadre, qui doivent être constamment parallèles aux coordonnées primitives.

Afin de suivre une marche uniforme dans l'exécution des travaux confiés à un grand nombre d'Ingénieurs-Géographes, et de pouvoir assembler toutes les cartes particulières de ce vaste Empire, le Dépôt général de la Guerre a posé en principe que la courbure des parallèles serait réglée d'après celle que prend le 50ième dont le centre est situé sur le méridien rectiligne de Paris, pris pour axe principal des abscisses; parceque c'est non-seulement à la latitude de ce parallèle moyen que le grade du méridien vaut 100000$^{mèt.}$, mais encore c'est parceque, relativement à la France, les distances respectives des lieux sont à fort peu près les mêmes que sur la sphéroïde terrestre. De là, la possibilité de rapporter immédiatement les opérations de détail faites suivant le système de projection orthogonale, sur les feuilles mêmes construites à grande échelle d'après le système de projection du Dépôt général de la Guerre, et destinées à couvrir les planchettes employées sur le terrain. De là, encore, la possibilité de former des cartes chorographiques par la simple réduction des levés, à l'échelle convenue; puisque l'on conserve absolument la même projection, et que l'on élude les difficultés et les erreurs qui naissent nécessairement par le passage d'une espèce de projection à une autre espèce.

Mode de division d'une carte en feuilles d'assemblage.

4. Il résulte de ce qui précède que l'axe des ordonnées est la droite tangente au parallèle moyen et menée par le centre du développement : ainsi l'axe des abscisses et celui-ci divisent la carte en quatre régions. Fig. 2.

Maintenant si sur l'axe des abscisses et à partir de l'origine A, l'on porte vers le nord ou le haut de la carte, et vers le sud, des distances

2

de 5 décimètres ; puis sur l'axe des ordonnées, et à partir du même point, tant vers l'est que vers l'ouest, des distances de 8 décimètres ; ensuite que par tous ces points de division l'on mène des parallèles à ces axes, les quatre régions dont il s'agit seront divisées en rectangles dont chacun formera une feuille de la carte. Afin d'être à même de reconnaître la place que chaque feuille occupe dans la série, on est convenu de lui faire porter deux numéros, l'un qui assigne son rang dans le sens du méridien principal ou de l'axe des abscisses, l'autre qui marque son rang dans le sens de l'axe des ordonnées ; et pour savoir en outre dans quelle région cette feuille se trouve située, on place ces nnméros au milieu des côtés qui forment l'angle de la fenille dont le sommet est le plus près du centre du développement. Par exemple, la feuille *B* placée dans la région sud-est, sera numérotée ainsi : $\cdot\overset{3}{\square}$; la fenille *C* qui est située dans la région snd-ouest, aura pour notation $\overset{3}{\square}\cdot$; la feuille *D* qui est dans la région nord-est, offrira cette disposition de numéros $\cdot\underset{3}{\square}$; enfin la feuille *E* placée dans la région nord-ouest sera numérotée ainsi $\underset{3}{\square}\cdot$.

Cette notation fort simple est due à M. Henry, Colonel au Corps Impérial des Ingénieurs-Géographes.

Formation des bandes pour les levés de détail.

5. Tout ce que je viens de dire sur la division d'une carte en plusieurs feuilles, n'est relatif qu'à la rédaction des levés faite à l'échelle de la gravure ; mais les Ingénieurs qui figurent le terrain tracent lenrs opérations sur des feuilles auxquelles on a donné le nom de *bandes*, parcequ'elles ont ordinairement 2 mètres de longueur sur 0m,5 seulement de largeur. On projette avant tout, sur chacune de ces bandes rectangulaires, un certain nombre de points fournis par la triangulation, afin que l'Ingénieur puisse coordonner et vérifier sans cesse les opérations de détail qu'il exécute avec la planchette ou la boussole. Le procédé employé jusqu'à ce jour pour placer ces points, a été celui de Cassini ; cependant à cause du peu

de rigueur de sa méthode pour déterminer les distances à la méridienne et à sa perpendiculaire (n° 73, *Géodésie*) des points fort éloignés de ces axes principaux, l'on commence à abandonner son système de projection, ne fût-ce même que dans la vue d'éviter l'inconvénient dont j'ai parlé à la fin du n° 3. Il s'agit donc de faire voir comment il convient de diviser la carte en diverses bandes, pour y projeter les points trigonométriques selon la méthode actuelle du Dépôt général de la Guerre.

Ce qui me paraît de plus naturel à cet égard, c'est de faire coïncider l'angle de la bande qui est le plus près du centre du développement, avec l'angle homologue de la première feuille de la carte; parceque de cette manière un certain multiple de la longueur et de la hauteur d'une de ces bandes, formera exactement une longueur et une hauteur de feuille, lorsque la carte sera réduite à l'échelle de la gravure. En effet, supposons que le levé topographique doive se faire au $\frac{1}{10000}$ et se graver au $\frac{1}{100000}$; dix hauteurs de bandes feront 5^m, et quatre longueurs feront 8^m. Quand le levé sera réduit à l'échelle de $\frac{1}{100000}$, la feuille de réduction, qui a constamment 0^m,5 dans un sens, et 0^m,8 dans l'autre, comprendra précisément le détail de 40 bandes.

Si au contraire on levait au $\frac{1}{20000}$ et que l'on dût encore réduire au $\frac{1}{100000}$, ou bien si le levé devait être au $\frac{1}{10000}$ et sa réduction au $\frac{1}{50000}$, une feuille de la carte ne comprendrait que le détail de 10 bandes; savoir, cinq en hauteur, et deux en longueur. Par ce moyen il sera possible de tracer sur ces bandes, et à l'échelle du levé, les lignes de division des feuilles; par suite aussi les points du canevas trigonométrique, à l'aide de leurs coordonnées.

Après ces notions générales, occupons-nous de la recherche des formules relatives à la projection actuelle, et d'abord donnons le développement en séries de quelques fonctions utiles.

CHAPITRE II.

Théorie analytique de la projection précédente.

Séries fondamentales.

6. EULER, dans son *Calcul différentiel et intégral*, a donné le développement en série de la fonction $\frac{1}{1+n\cos z}$, ordonné suivant les cosinus des multiples de l'angle z; mais la théorie des exponentielles imaginaires conduit au but d'une manière beaucoup plus simple que celle employée par ce grand Géomètre. En effet, feignons que l'on ait

$$\frac{1}{1+n\cos z}=\frac{A+Bc^{z\sqrt{-1}}}{\alpha+\beta c^{z\sqrt{-1}}}+\frac{A+Bc^{-z\sqrt{-1}}}{\alpha+\beta c^{-z\sqrt{-1}}}$$

A, B, α, β étant des coefficiens indéterminés, et c la base des logarithmes hyperboliques; or à cause de $\cos z=\frac{c^{z\sqrt{-1}}+c^{-z\sqrt{-1}}}{2}$, on a

$$\frac{1}{2+n(c^{z\sqrt{-1}}+c^{-z\sqrt{-1}})}=\frac{A+Bc^{z\sqrt{-1}}}{\alpha+\beta c^{z\sqrt{-1}}}+\frac{A+Bc^{-z\sqrt{-1}}}{\alpha+\beta c^{-z\sqrt{-1}}};$$

et si on réduit au même dénominateur les deux termes du second membre de cette équation, puis qu'on égale entre eux les termes homogènes, on aura ces relations

$$A\alpha+B\beta=1 \qquad \alpha^2+\beta^2=2$$
$$A\beta+B\alpha=0 \qquad \alpha\beta=n,$$

desquelles on obtient

$$A(\alpha^2-\beta^2)=\alpha, \quad \alpha^2=1+\sqrt{1-n^2}, \quad \frac{\beta}{\alpha}=\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n},$$
$$B(\beta^2-\alpha^2)=\beta, \quad \beta^2=1-\sqrt{1-n^2}, \quad \alpha^2-\beta^2=2\sqrt{1-n^2};$$

ainsi

$$\frac{1}{1+n\cos z}=\frac{1}{\alpha^2-\beta^2}\left[\frac{1-\frac{\beta}{\alpha}c^{z\sqrt{-1}}}{1+\frac{\beta}{\alpha}c^{z\sqrt{-1}}}+\frac{1-\frac{\beta}{\alpha}c^{-z\sqrt{-1}}}{1+\frac{\beta}{\alpha}c^{-z\sqrt{-1}}}\right].$$

Si, pour abréger, l'on fait $\frac{\beta}{\alpha}=m$, ensuite que l'on réduise en série chacune des fractions $\frac{1-mc^{z\sqrt{-1}}}{1+mc^{z\sqrt{-1}}}$, $\frac{1-mc^{-z\sqrt{-1}}}{1+mc^{-z\sqrt{-1}}}$, et que l'on ait égard à ce qu'en général $\cos\mu z=\frac{c^{\mu z\sqrt{-1}}+c^{-\mu z\sqrt{-1}}}{2}$, on trouvera définitivement

$$(\text{A})\ldots\frac{1}{1+n\cos z}=\frac{1}{(1-n^2)^{\frac{1}{2}}}(1-2m\cos z+2m^2\cos 2z-2m^3\cos 3z+2m^4\cos 4z\ldots)$$

La même méthode s'emploie avec un égal succès pour réduire en série de cette forme la fonction $\log(1+n\cos z)$. Pour le prouver, soit encore mis ici $\frac{c^{z\sqrt{-1}}+c^{-z\sqrt{-1}}}{2}$ au lien de $\cos z$, on aura

$$\log(1+n\cos z)=\log(2+nc^{z\sqrt{-1}}+nc^{-z\sqrt{-1}})-\log 2;$$

et parceque l'on peut supposer que

$$2+nc^{z\sqrt{-1}}+nc^{-z\sqrt{-1}}=(\alpha+\beta c^{z\sqrt{-1}})(\alpha+\beta c^{-z\sqrt{-1}}),$$

α et β étant indéterminés, on aura, en développant et égalant la quantité rationnelle à la quantité rationnelle, et la partie imaginaire à la partie imaginaire,

$$\alpha^2+\beta^2=2; \qquad \alpha\beta=n;$$

ainsi

$$2\alpha=\sqrt{2}(\sqrt{1+n}+\sqrt{1-n}); \qquad \frac{\beta}{\alpha}=\frac{1-\sqrt{1-n^2}}{n}=m,$$

$$2\beta=\sqrt{2}(\sqrt{1+n}-\sqrt{1-n}), \qquad n=\frac{2m}{1+m^2},$$

et comme en général $\log(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\ldots\ldots$; on trouvera, après les réductions convenables,

$$(\text{B})\ldots\log(1+n\cos z)=\log\frac{\alpha^2}{2}+\log(1+mc^{z\sqrt{-1}})+\log(1+mc^{-z\sqrt{-1}})$$

$$=-\log\frac{2m}{n}+2K\left[m\cos z-\tfrac{1}{2}m^2\cos 2z+\tfrac{1}{3}m^3\cos 3z-\ldots\right],$$

$K=0{,}43429448$ étant le module des tables; ce qui est conforme au résultat auquel Euler est parvenu.

La fonction $(1+n\cos z)^{\mu}$ peut aussi se développer en série de la forme $A+B\cos z+C\cos 2z+D\cos 3z+\ldots\ldots$; mais comme nous n'aurons besoin par la suite que du développement particulier de $\frac{1}{(1+n\cos z)^{\frac{3}{2}}}$, nous effectuerons ce dernier par la méthode naturelle, laquelle consiste à développer d'abord $(1+n\cos z)^{-\frac{3}{2}}$ par la formule du binome, et ensuite à changer dans le résultat les puissances du cosinus de l'arc z en cosinus de ses multiples. Cependant afin de pouvoir découvrir aisément la loi des coefficiens numériques du développement, nous aurons soin de n'effectuer aucune réduction dans la formule générale

$$2^{\mu-1}\cos z^{\mu}=\cos\mu z+\mu\cos(\mu-2)z+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}\cos(\mu-4)z$$
$$+\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}\cos(\mu-6)z+\ldots\ldots$$

qui, comme l'on sait, exige que l'on s'arrête lorsque l'arc devient négatif, et que l'on ne prenne que la moitié du coefficient du cosinus de l'arc nul que l'on trouvera si μ est pair.

Il résulte de là que l'on a d'abord

$$(1+n\cos z)^{-\frac{3}{2}}=1-\frac{3}{2}n\cos z+\frac{3}{2}.\frac{5}{4}n^2\cos^2 z-\frac{3}{2}.\frac{5}{4}.\frac{7}{6}n^3\cos^3 z$$
$$+\frac{3}{2}.\frac{5}{4}.\frac{7}{6}.\frac{9}{8}n^4\cos^4 z\ldots\ldots$$

ensuite en ordonnant par rapport à $\cos z$, $\cos 2z$, $\cos 3z\ldots\ldots$

$$(1+n\cos z)^{-\frac{3}{2}}=1+\frac{3}{2^2}.\frac{5}{4}n^2+\frac{3}{2^4}.\frac{5.7.9}{4.6.8}.\frac{4.3}{2^2}n^4+\frac{3}{2^6}.\frac{5.7.9.11.13}{4.6.8.10.12}.\frac{6.5.4}{2^2.3}n^6$$
$$+\frac{3}{2^8}.\frac{5.7.9.11.13.15.17}{4.6.8.10.12.14.16}.\frac{8.7.6.5}{2^2.3.4}n^8$$
$$-\left[\frac{3}{2}n+\frac{3.5.7.3}{2^3.4.6}n^3+\frac{3.5.7.9.11.5.4}{2^5.4.6.8.10.2}n^5+\frac{3.5.7.9.11.13.15.7.6.5}{2^7.4.6.8.10.12.14.2.3}n^7\ldots\right]\cos z$$
$$+\left[\frac{3}{2^2}.\frac{5}{4}n^2+\frac{3.5.7.9.4}{2^4.4.6.8.1}n^4+\frac{3.5.7.9.11.13.6.5}{2^6.4.6.8.10.12.2}n^6\ldots\ldots\ldots\ldots\right]\cos 2z$$
$$-\left[\frac{3.5.7}{2^3.4.6}n^3+\frac{3.5.7.9.11.5}{2^5.4.6.8.10.1}n^5+\frac{3.5.7.9.11.13.15.7.6}{2^7.4.6.8.10.12.14.2}n^7\ldots\ldots\right]\cos 3z$$
$$+\left[\frac{3.5.7.9}{2^4.4.6.8}n^4+\frac{3.5.7.9.11.13.6}{2^6.4.6.8.10.12.1}n^6+\frac{3.5.7.9.11.13.15.17.8.7}{2^8.4.6.8.10.12.14.16.2}n^8\ldots\right]\cos 4z$$
$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ou bien plus simplement,

$$(1+n\cos z)^{-\frac{3}{2}}=\left[1+\frac{3.5}{2^2.2.2}n^2+\frac{3.5.7.9}{2^4.2.2.4.4}n^4+\frac{3.5.7.9.11.13}{2^6.2.2.4.4.6.6}n^6 + \frac{3.5.7.9.11.13.15.17}{2^8.2.2.4.4.6.6.8.8}n^8\ldots\ldots\ldots\right]$$

$$-2n\left[\frac{3}{2^1.2}+\frac{3.5.7}{2^3.2.2.4}n^2+\frac{3.5.7.9.11}{2^5.2.2.4.4.6}n^4+\frac{3.5.7.9.11.13.15}{2^7.2.2.4.4.6.6.8}n^6\ldots\right]\cos z$$

$$+4n^2\left[\frac{1.3.5}{2^2.2.2.4}+\frac{2.3.5.7.9}{2^4.2.2.4.4.6}n^2+\frac{3.3.5.7.9.11.13}{2^6.2.2.4.4.6.6.8}n^4\ldots\ldots\right]\cos 2z$$

$$-8n^3\left[\frac{1.2.3.5.7}{2^3.2.2.4.4.6}+\frac{2.3.3.5.7.9.11}{2^5.2.2.4.4.6.6.8}n^2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right]\cos 3z$$

$$+16n^4\left[\frac{1.2.3.3.5.7.9}{2^4.2.2.4.4.6.6.8}+\frac{2.3.4.3.5.7.9.11.13}{2^6.2.2.4.4.6.6.8.8.10}n^2\ldots\ldots\ldots\right]\cos 4z$$

$$-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

série convergente, lorsque n est plus petit que l'unité. Si l'on désigne respectivement les coefficiens de ses termes par q, q', q'', q'''...., on aura

$$(C)\ldots\left(\frac{1}{1+n\cos z}\right)^{\frac{3}{2}}=q-q'\cos z+q''\cos 2z-q'''\cos 3z+q^{\text{iv}}\cos 4z - \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Avec un peu d'attention, l'on reconnaîtra que le terme général du premier polynome q de cette série est, en désignant par h le rang de celui que l'on cherche,

$$+\frac{3.5.7.9\ldots\ldots\ldots\ldots[4h-3]}{2^{(2h-2)}\,2^2.4^2.6^2\ldots\ldots[2h-2]^2}\cdot n^{(2h-2)},$$

et que le terme général du polynome $q^{(i)}\cos(i-1)z$ occupant le rang i dans cette même série, est

$$\mp 2^{i-1}n^{i-1}\left[+\frac{h(h+1)\ldots[i+h-3].3.5.7..[2i+4h-5]}{2^{(i+2h-3)}\,2^2.4^2.6^2\ldots\ldots\ldots\ldots[2i+2h-4]}n^{(2h-2)}\right]\cos(i-1)z,$$

le signe — ayant lieu lorsque i est pair, et le signe + lorsque i est impair; et les facteurs $h(h+1)\ldots.[i+h-3]$ ne devant être pris que quand $[i+h-3]$ est plus grand que h.

Il nous sera encore utile par la suite, de connaître le développe-

ment de la valeur de

$$U^{\mu}=\frac{e^{\mu}}{(1+\sqrt{1-e^2})^{\mu}};$$

procédant suivant les puissances de e. Dans cette vue ; soit $k=1+\sqrt{1-e^2}=\frac{1}{k_1}$, on aura $k=2-\frac{e^2}{k}$: or par un théorème de M. Lagrange, généralisé par M. Laplace, lorsque $y=a+x\varphi(y)$, on a (*Calc. diff.* de Lacroix, tom. 1, pag. 210)

$$f(y)=f(a)+\varphi(a)\frac{d.f(a)}{da}.x+\frac{d.\left(\varphi^2(a)\frac{d.f(a)}{da}\right)}{da}.\frac{x^2}{2}$$
$$+\frac{d^2.\left(\varphi^3(a)\frac{d.f(a)}{da}\right)}{da^2}.\frac{x^3}{2.3}+\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Comparant donc

$$y=a+x\varphi(y)$$

avec la proposée

$$k=2-e^2\frac{1}{k};$$

on a

$$a=2;\quad x=-e^2,\quad \varphi(y)=\frac{1}{k};$$

parconséquent si l'on veut avoir la valeur de k^{μ}, auquel cas $f(y)=k^{\mu}$, on aura

$$f(a)=2^{\mu},\quad \varphi(a)=\frac{1}{2};$$
$$\varphi(a)\frac{d.f(a)}{da}=\frac{1}{2}.\mu.2^{\mu-1}=\mu.2^{\mu-2};$$
$$\varphi^2(a)\frac{d.f(a)}{da}=\frac{1}{2^2}.\mu.2^{\mu-1}=\mu.2^{\mu-3};$$
$$\frac{d.\left(\varphi^2(a)\frac{d.f(a)}{da}\right)}{da}=\mu.(\mu-3).2^{\mu-4},$$
$$\varphi^3(a)\frac{d.f(a)}{da}=\frac{1}{2^3}.\mu.2^{\mu-1}=\mu.2^{\mu-4};$$
$$\frac{d^2.\left(\varphi^3(a)\frac{d.f(a)}{da}\right)}{da^2}=\mu.(\mu-4)(\mu-5).2^{\mu-6}.$$

Ainsi

Ainsi la substitution de ces valeurs dans la série précédente, donne

$$k^{\mu}=2^{\mu}-\mu\,.\,2^{\mu-2}e^{2}+\frac{\mu(\mu-3)}{1.2}\,.\,2^{\mu-4}e^{4}-\frac{\mu(\mu-4)(\mu-5)}{1.2.3}\,2^{\mu-6}e^{6}+\ldots$$

Mais à cause de $k_{i}=\frac{1}{k}$, on a $k_{i}^{\mu}=\frac{1}{k^{\mu}}$; donc

$$k_{i}^{\mu}=\frac{1}{2^{\mu}}+\frac{\mu\,.\,e^{2}}{2^{\mu+2}}+\frac{\mu(\mu+3)}{1.2}\,.\,\frac{e^{4}}{2^{\mu+4}}+\frac{\mu(\mu+4)(\mu+5)}{1.2.3}\,.\,\frac{e^{6}}{2^{\mu+6}}+\ldots$$

Donc enfin

$$\text{(D)}\ldots\ U^{\mu}=\left(\frac{e}{2}\right)^{\mu}\left\{1+\frac{\mu}{1}\left(\frac{e}{2}\right)^{2}+\frac{\mu(\mu+3)}{1.2}\left(\frac{e}{2}\right)^{4}+\frac{\mu(\mu+4)(\mu+5)}{1.2.3}\left(\frac{e}{2}\right)^{6}+\ldots\right\}.$$

Cette série dont le terme général est

$$+\left(\frac{e}{2}\right)^{\mu}\left\{\frac{\mu(\mu+i)(\mu+i+1)(\mu+i+2)(\mu+i+3)\ldots\ldots[\mu+(2i-3)]}{1.2.3.4.5\ldots\ (i-1)}\left(\frac{e}{2}\right)^{2(i-1)}\right\},$$

trouve son application dans les hautes sciences mathématiques (voyez le Tom. I de la *Mécanique Céleste*, pag. 180).

Expressions de diverses lignes du sphéroïde terrestre.

7. Nous dénoterons constamment par

a le rayon de l'équateur du sphéroïde terrestre; *Fig. 3.*

b le demi-axe de révolution;

e l'excentricité de l'ellipse génératrice, en supposant le demi-grand axe $=1$, ensorte que $e^{2}=\frac{a^{2}-b^{2}}{a^{2}}$;

α l'aplatissement de la terre dans la même hypothèse, c'est-à-dire $\alpha=\frac{a-b}{a}$;

r le rayon de la terre, correspondant à la latitude vraie λ.

$\mathfrak{N}$ la normale au méridien, comprise entre le point dont la latitude vraie est λ, et l'axe de rotation de la terre.

n la portion de cette normale, comprise entre ce même point et le rayon de l'équateur ;

$\mathfrak{E}$ la tangente au méridien, menée par le point λ, et terminée au rayon prolongé de l'équateur ;

t la tangente au même point, terminée à l'axe de la terre prolongé ;

ρ le rayon du parallèle passant par le point λ;

γ le rayon de courbure du méridien elliptique.

Il résulte de la théorie exposée au n° 74 du *Traité de Géodésie*, que

$$\varpi = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots\ldots\ldots (1), \qquad n = \frac{a(1-e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots (2),$$

$$\mathfrak{E} = \frac{a(1-e^2) \operatorname{tang} \lambda}{(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots\ldots\ldots (5), \qquad t = \frac{a \cot \lambda}{(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots (4),$$

$$\rho = \frac{a \cos \lambda}{(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots\ldots\ldots (5), \qquad \gamma = \frac{a(1-e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{3}{2}}} \ldots\ldots (6),$$

$$r = a\left(1 - \frac{e^2(1-e^2)\sin^2\lambda}{1 - e^2 \sin^2 \lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \ldots (7), \text{ ou } r = a(1 - e^2 \sin^2 \psi)^{\frac{1}{2}}.$$

λ et ψ étant liées par l'équation $a \operatorname{tang} \psi = b \operatorname{tang} \lambda$.

Si on désigne en outre par dS la différentielle d'un arc S de méridien commençant à l'équateur et se terminant à la latitude λ, on aura

$$dS = \frac{a(1-e^2)\, d\lambda}{(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{3}{2}}} \qquad (8).$$

Toutes ces formules peuvent être mises sous une forme qui les rende susceptibles d'être développées aisément en séries : en effet à cause de

$$\frac{1}{1 - e^2 \sin^2 \lambda} = \frac{1}{1 - \frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{2} \cos 2\lambda} = \frac{1}{\left(1 - \frac{e^2}{2}\right)\left(1 + \frac{e^2}{2 - e^2} \cos 2\lambda\right)},$$

si l'on fait pour abréger, $n = \frac{e^2}{2 - e^2}$, il s'ensuivra que $e^2 = \frac{2n}{1+n}$; $1 - \frac{e^2}{2} = \frac{1}{1+n}$; parconséquent

$$\frac{1}{1 - e^2 \sin^2 \lambda} = \frac{1+n}{1 + n \cos 2\lambda},$$

et par suite

$$\mathfrak{N} = \frac{a\,(1+n)^{\frac{1}{2}}}{(1+n\cos 2\lambda)^{\frac{1}{2}}} \ldots\ldots\ldots\ldots (1'),\quad \eta = \frac{b^2}{a}\left(\frac{1+n}{1+n\cos 2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \ldots\ldots (2'),$$

$$\mathcal{E} = \frac{b^2 \operatorname{tang}\lambda}{a}\left(\frac{1+n}{1+n\cos 2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \ldots (3'),\quad t = a\cot\lambda\left(\frac{1+n}{1+n\cos 2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \ldots (4'),$$

$$\rho = a\cos\lambda\left(\frac{1+n}{1+n\cos 2\lambda}\right)^{\frac{1}{2}} \ldots (5'),\quad \gamma = \frac{b^2}{a}\left(\frac{1+n}{1+n\cos 2\lambda}\right)^{\frac{3}{2}} \ldots\ldots (6').$$

Quant au rayon de la terre, son expression devient, en réduisant au même dénominateur, et en ayant toujours égard à ce que $\sin^2\lambda = \frac{1-\cos 2\lambda}{2}$,

$$r = a\left\{\frac{\left[1 + \frac{e^2\left(1-\frac{e^2}{2}\right)\cos 2\lambda}{1-e^2+\frac{e^4}{2}}\right]\left[1-e^2+\frac{e^4}{2}\right]}{\left[1+\frac{e^2}{2-e^2}\cos 2\lambda\right]\left[1-\frac{e^2}{2}\right]}\right\}^{\frac{1}{2}};$$

or en faisant encore $\frac{e^2}{2-e^2} = n$, et supposant de plus $\frac{e^2\left(1-\frac{e^2}{2}\right)}{1-e^2+\frac{e^4}{2}} = n'$, on aura

$$n' = \frac{2n}{1+n^2},\quad 1-\frac{e^2}{2} = \frac{1}{1+n},\quad 1-e^2+\frac{e^4}{2} = \frac{1}{1+n'},$$

partant

$$r = a\left\{\frac{(1+n'\cos 2\lambda)(1+n)}{(1+n\cos 2\lambda)(1+n')}\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (7')$$

et

$$dS = \frac{b^2}{a}\left(\frac{1+n}{1+n\cos 2\lambda}\right)^{\frac{3}{2}} d\lambda \qquad (8').$$

8. Appliquons maintenant les séries du n° 6. D'abord en prenant les logarithmes des deux membres de l'équation précédente (1′), l'on aura, à cause de la série (B),

$$\begin{aligned}
\log \mathfrak{N} &= \log a + \tfrac{1}{2}\log(1+n) - \tfrac{1}{2}\log(1+n\cos 2\lambda)\\
&= \log a + \tfrac{1}{2}\log(1+n) + \tfrac{1}{2}\log(1+m^2)\\
&\qquad - K\left[m\cos 2\lambda - \tfrac{1}{2}m^2\cos 4\lambda + \tfrac{1}{3}m^3\cos 6\lambda - \ldots\right]\\
&= \log a + K\left[m - \tfrac{1}{2}m^2 + \tfrac{1}{3}m^3 - \ldots\right]\\
&\qquad - K\left[m\cos 2\lambda - \tfrac{1}{2}m^2\cos 4\lambda + \tfrac{1}{3}m^3\cos 6\lambda - \ldots\ldots\right].
\end{aligned}$$

Par la même raison,

$$\log n = \log \frac{b^2}{a} + K\,[\,m - \tfrac{1}{2}\,m^2 + \tfrac{1}{3}\,m^3 - \ldots]$$
$$- K\,[\,m \cos 2\lambda - \tfrac{1}{2}\,m^2 \cos 4\lambda + \tfrac{1}{3}\,m^3 \cos 6\lambda - \ldots]$$

$$\log \gamma = \log \frac{b^2}{a} + 3K\,[\,m - \tfrac{1}{2}\,m^2 + \tfrac{1}{3}\,m^3 - \ldots]$$
$$- 3K\,[\,m \cos 2\lambda - \tfrac{1}{2}\,m^2 \cos 4\lambda + \tfrac{1}{3}\,m^3 \cos 6\lambda - \ldots],$$

et ainsi de même pour les logarithmes des autres lignes du sphéroïde.

Pour ce qui concerne le logarithme du rayon de la terre, son développement en série sera un peu différent; car de l'équation (7′), on tire

$$\log \frac{r}{a} = \tfrac{1}{2} \log (1 + n) + \tfrac{1}{2} \log (1 + n' \cos 2\lambda)$$
$$- \tfrac{1}{2} \log (1 + n') - \tfrac{1}{2} \log (1 + n \cos 2\lambda);$$

et à cause de

$$\log (1 + n \cos 2\lambda) = - \log (1 + m^2)$$
$$+ 2K\,[m \cos 2\lambda - \tfrac{1}{2}\,m^2 \cos 4\lambda + \tfrac{1}{3}\,m^3 \cos 6\lambda - \ldots],$$

et de la relation $\frac{1 - \sqrt{1 - n^2}}{n} = m$, on aura pareillement

$$\log (1 + n' \cos 2\lambda) = - \log (1 + m'^2)$$
$$+ 2K\,[\,m' \cos 2\lambda - \tfrac{1}{2}\,m'^2 \cos 4\lambda + \tfrac{1}{3}\,m'^3 \cos 6\lambda - \ldots].$$

D'ailleurs on sait par ce qui précède, que $n' = \frac{2n}{1 + n^2}$, donc $m' = n$ ou $m' = \frac{1}{n}$; mais comme n est plus petit que l'unité, cette seconde valeur de m' ne peut être admise, puisqu'elle rendrait la série divergeute; donc

$$\log \frac{r}{a} = \tfrac{1}{2} \log \left(\frac{1 + m^2}{1 + n}\right)$$
$$+ K\,[(n - m) \cos 2\lambda - \tfrac{1}{2}(n^2 - m^2) \cos 4\lambda + \tfrac{1}{3}(n^3 - m^3) \cos 6\lambda - \ldots];$$

et puisque $n = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$, $m = \frac{a - b}{a + b}$, à cause de $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, on a

$$\tfrac{1}{2} \log \left(\frac{1 + m^2}{1 + n}\right) = \log \left(\frac{a^2 + b^2}{a + b}\right) - \log a;$$

donc enfin

$$\log r = \log a + \log\left(\frac{a^2+b^2}{a(a+b)}\right)$$
$$+K\left[(n-m)\cos 2\lambda - \tfrac{1}{2}(n^2-m^2)\cos 4\lambda + \tfrac{1}{3}(n^3-m^3)\cos 6\lambda - \ldots\right]$$

Dans le second volume de la *Méridienne*, et le discours préliminaire des *Tables du Bureau des Longitudes*, M. Delambre a donné le logarithme de r en série ordonnée, comme la précédente, suivant les cosinus des multiples de la latitude; mais j'ai préféré d'en rendre la loi des termes manifeste.

Si au lieu des logarithmes, on voulait les valeurs mêmes de ces lignes, voici comment l'on procéderait pour arriver encore à des séries régulières et fort simples.

Par exemple, la valeur de $\mathfrak{N}$ élevée au quarré, donne

$$\frac{\mathfrak{N}^2}{a^2} = \frac{(1+n)}{1+n\cos 2\lambda};$$

or par la formule (A) du n° 6, on a

$$\frac{\mathfrak{N}^2}{a^2} = \left(\frac{1+n}{1-n}\right)^{\frac{1}{2}}(1 - 2m\cos 2\lambda + 2m^2\cos 4\lambda - 2m^3\cos 6\lambda + \ldots\ldots)$$
$$= \frac{a}{b}(1 - 2m\cos 2\lambda + 2m^2\cos 4\lambda - 2m^3\cos 6\lambda + \ldots\ldots).$$

Il est évident que les expressions des autres lignes (2′), (3′), (4′), (5′) du sphéroïde, se transformeraient également en séries de mêmes formes que cette dernière.

Comme toutes ces transformations sont très-faciles à effectuer, je me dispenserai de les donner; d'ailleurs on les trouvera dans un mémoire de M. le Colonel Henry, que le Dépôt général de la Guerre va publier pour faire suite à son *Mémorial*, et qui offrira en outre des recherches fort intéressantes à ce sujet. J'observerai cependant que pour parvenir aux valeurs des premières puissances des lignes du sphéroïde, qui ne contiussent de même que les cosinus des multiples de la latitude, il serait nécessaire de suivre la méthode que j'ai donnée au n° 6, pour développer ainsi l'expression du rayon de courbure du méridien; mais alors la loi des coefficiens serait bien moins simple que ci-dessus.

Il est à remarquer que les valeurs de n et de m élevées à une puissance entière quelconque, peuvent être exprimées aussi en séries régulières; car d'abord puisque $n = \frac{e^2}{2 - e^2}$, on obtient sur-le-champ, par la formule du binome,

$$n = \left(\frac{e^2}{2}\right)^1 + \left(\frac{e^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^2}{2}\right)^3 + \left(\frac{e^2}{2}\right)^4 + \ldots .;$$

et ensuite, par la méthode connue de l'élevation d'un polynome à la puissance μ,

$$n^\mu = \left(\frac{e^2}{2}\right)^\mu \left[\begin{array}{l} 1 + \mu\left(\frac{e^2}{2}\right)^1 + \left(\mu + \frac{\mu(\mu-1)}{2}\right)\left(\frac{e^2}{2}\right)^2 \\ + \left(\mu + \frac{\mu(\mu-1)}{2} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{2.3}\right)\left(\frac{e^2}{2}\right)^3 + \ldots \end{array} \right];$$

d'ailleurs

$$n' = \frac{2n}{1+n^2} = \frac{a^4 - b^4}{a^4 + b^4},$$

ou si l'on veut

$$n' = 2n\,(1+n^2)^{-1} = 2n\,(1 - n^2 + n^4 - n^6 + \ldots .).$$

Il s'agit aussi de connaître la valeur générale de m^μ : or on a vu au n° 6, que $\frac{1 - \sqrt{1 - n^2}}{n} = m$; parconséquent

$$m = \frac{a-b}{a+b} = \frac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}} = \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{1 + \sqrt{1-e^2}} = \left(\frac{e}{1+\sqrt{1-e^2}}\right)^2:$$

expression qui est la même que celle du numéro cité; on a donc généralement, en vertu de l'équation (D),

$$m^\mu = \left(\frac{e}{2}\right)^{2\mu} \left\{ \begin{array}{l} 1 + 2\mu\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \frac{2\mu(2\mu+3)}{1.2}\left(\frac{e}{2}\right)^4 + \frac{2\mu(2\mu+4)(2\mu+5)}{1.2.3}\left(\frac{e}{2}\right)^6 \\ \qquad + \frac{2\mu(2\mu+5)(2\mu+6)(2\mu+7)}{1.2.3.4}\left(\frac{e}{2}\right)^8 + \ldots . \end{array} \right\}.$$

9. On sait par la théorie des surfaces courbes, que les rayons de plus grande et de plus petite courbure sont dans des plans normaux

perpendiculaires entre eux. Relativement à l'ellipsoïde de révolution, l'un de ces rayons est évidemment dans un plan perpendiculaire au méridien, et les considérations géométriques conduisent à faire voir qu'il n'est autre que la normale à ce méridien, située dans la commune section des deux plans dont il s'agit, et terminée à l'axe de révolution; mais la démonstration analytique suivante ne laissera aucun doute à cet égard.

L'équation de la surface de l'ellipsoïde terrestre est Fig. 3.

$$b^2x^2 + a^2y^2 + b^2z^2 = a^2b^2,$$

et si l'on désigne par λ la latitude du point A sur cet ellipsoïde, l'équation de la section, faite suivant la normale AM et perpendiculairement au méridien PAE, sera (pag. 142 du *Traité de Géodésie*)

$$y'^2 + \frac{1 - e^2\cos^2\lambda}{1 - e^2}\,x'^2 + \frac{2e^2\cos^2\lambda}{(1 - e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}\,x' = 1 - \frac{e^4\cos^2\lambda}{1 - e^2\sin^2\lambda}.$$

Cette section est donc une ellipse dont les demi-axes a', b' sont

$$a' = \frac{a\,(1 - e^2)}{(1 - e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}(1 - e^2\cos^2\lambda)}, \quad b' = \left(\frac{a^2\,(1 - e^2)}{(1 - e^2\sin^2\lambda)\,(1 - e^2\cos^2\lambda)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Soit e' l'excentricité de cette ellipse, et n' sa normale terminée à l'axe AM des x' : à l'origine A, l'on aura $n' = a'(1 - e'^2)$, puisque pour l'ellipse génératrice on a, dans la même circonstance, $n = a\,(1 - e^2)$; et, parcequ'en général le rayon γ' de courbure, dans toutes les courbes du second degré, est égal au cube de la normale, divisé par le quart du quarré du paramètre, on a pour la section et le point que l'on considère,

$$\gamma' = \frac{n'^3}{\frac{1}{4}\,p'^2},$$

p' étant le paramètre ; donc

$$\gamma' = \frac{b'^2}{a'} = \frac{a}{(1 - e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}};$$

donc enfin

$$\gamma' = \mathfrak{N};$$

ainsi la normale $\mathfrak{N}$ de l'ellipse génératrice est en effet le plus grand rayon de courbure de la surface terrestre, tandis que $\gamma = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}$ en est le plus petit rayon.

10. Afin de pouvoir évaluer numériquement toutes les séries précédentes, il importe de connaître les axes de la terre. Les détails dans lesquels je suis entré à ce sujet, dans mon *Traité de Géodésie*, ne laissent, je crois, rien à desirer; cependant la méthode que j'y ai exposée pour déterminer l'aplatissement de la terre n'étant réellement qu'approximative, je vais, à l'instar de la Commission des poids et mesures de France, employer à cette détermination les arcs entiers de méridien, au lieu des longueurs seules des grades moyens provenant de la mesure de ces arcs; et je parviendrai aux résultats mêmes que cette Commission a obtenus, et dont elle a rendu compte à l'Institut, par l'organe de M. Van-Swinden. Voyez le rapport de ce savant, inséré parmi les Mémoires de cette Société, tom. II, pag. 43.

L'équation (8') étant intégrée entre les limites λ et λ', considérées comme les latitudes des extrémités de l'arc A, on trouve, à cause de la série (C),

$$A = \frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}} \left\{ \begin{aligned} & q(\lambda-\lambda') - q'\sin(\lambda-\lambda')\cos(\lambda+\lambda') \\ & + \frac{q''}{2}\sin 2(\lambda-\lambda')\cos 2(\lambda+\lambda') \\ & - \frac{q'''}{3}\sin 3(\lambda-\lambda')\cos 3(\lambda+\lambda') \ldots\ldots \end{aligned} \right\}.$$

Pour un autre arc A' compris entre les latitudes Λ, Λ', on a pareillement

$$A' = \frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}} \left\{ \begin{aligned} & q(\Lambda-\Lambda') - q'\sin(\Lambda-\Lambda')\cos(\Lambda+\Lambda') \\ & + \frac{q''}{2}\sin 2(\Lambda-\Lambda')\cos 2(\Lambda+\Lambda') \\ & - \frac{q'''}{3}\sin 3(\Lambda-\Lambda')\cos 3(\Lambda+\Lambda') \ldots \end{aligned} \right\}.$$

Dans la vue d'abréger la notation, soit

$$\lambda - \lambda' = \varphi, \quad \lambda + \lambda' = \Phi,$$
$$\Lambda - \Lambda' = \varphi', \quad \Lambda + \Lambda' = \Phi',$$

alors les deux équations précédentes seront

$$(M)\ldots\ldots\begin{cases} A=\frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\left\{q\varphi-q'\sin\varphi\cos\Phi+\frac{q''}{2}\sin 2\varphi\cos 2\Phi \atop -\frac{q'''}{3}\sin 3\varphi\cos 3\Phi\ldots\right\} \\ A'=\frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\left\{q\varphi'-q'\sin\varphi'\cos\Phi'+\frac{q''}{2}\sin 2\varphi'\cos 2\Phi' \atop -\frac{q'''}{3}\sin 3\varphi'\cos 3\Phi'\ldots\right\} \end{cases}$$

Avant d'en déduire une relation entre les quantités connues et les puissances de l'excentricité, mettons pour q, q', q'', q''', leurs valeurs en e^2, en bornant toutefois l'approximation aux termes en e^4 : or, par ce qui précède,

$$n=\frac{e^2}{2}+\frac{e^4}{4},\quad \text{donc}\quad n^2=\frac{e^4}{4};$$

ainsi on a

$$q=1+\frac{15}{64}e^4,\quad q'=\frac{3}{4}\left(e^2+\frac{1}{2}e^4\right),\quad q''=\frac{15}{64}e^4.$$

Substituant ces valeurs dans les équations (M), il vient

$$A=\frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\left\{\left(1+\frac{15}{64}e^4\right)\varphi-\frac{3}{4}\left(e^2+\frac{1}{2}e^4\right)\sin\varphi\cos\Phi \atop +\frac{15}{128}e^4\sin 2\varphi\cos 2\Phi\right\}$$

$$A'=\frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\left\{\left(1+\frac{15}{64}e^4\right)\varphi'-\frac{3}{4}\left(e^2+\frac{1}{2}e^4\right)\sin\varphi'\cos\Phi' \atop +\frac{15}{128}e^4\sin 2\varphi'\cos 2\Phi'\right\},$$

et soit encore, pour abréger,

$$\frac{\pi}{200}(A\varphi'-A'\varphi)=M,\quad A\sin\varphi'\cos\Phi'-A'\sin\varphi\cos\Phi=N,$$
$$A\sin 2\varphi'\cos 2\Phi'-A'\sin 2\varphi\cos 2\Phi=P,$$

on aura, en divisant les deux équations ci-dessus l'une par l'autre, et rétablissant l'homogénéité,

$$\frac{15}{64}e^4\left(M-\frac{8}{5}N+\frac{P}{2}\right)-\frac{3}{4}e^2N+M=0,$$

d'où l'on tire aisément, en résolvant cette équation du second degré, ou par le retour des suites,

$$e^2 = \frac{4M}{3N} + \frac{5}{16N}\left(M - \frac{8}{5}N + \frac{P}{2}\right)\left(\frac{4M}{3N}\right)^2 + \frac{2.25}{16^2 N^2}\left(M - \frac{8}{5}N + \frac{P}{2}\right)^2\left(\frac{4M}{3N}\right)^3 \quad \ldots (\mathrm{N}).$$

Application. Suivant les opérations géodésiques de Delambre et Méchain,

$A = 551584',72$, $\lambda = 56^G,706944$, $\lambda' = 45^G,958281$ (boréales);

et suivant celles de Bouguer,

$A' = 176897',4$, $\Lambda = 0^G,0463$ (boréal.), $\Lambda' = -3^G,4170$ (austr.).

Il suit de là que

$$\varphi = \lambda - \lambda' = 10^G,748663, \quad \Phi = \lambda + \lambda' = 102^G,665225,$$
$$\varphi' = \Lambda - \Lambda' = 3,4633, \quad \Phi' = \Lambda + \Lambda' = -3,3707;$$

d'ailleurs

$$M = \frac{\pi}{200}(A\varphi' - A'\varphi),$$

π étant la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon $= 1$; ainsi on a

$$A\varphi' = 1910303,360776, \quad A'\varphi = 1901410,5381762,$$
$$\pi = 3,1415927, \quad \frac{A\varphi' - A'\varphi}{200} = 44,464113,$$
$$M = 139,6881328,$$
$$A\sin\varphi'\cos\Phi' = 29950,112602; \quad A'\sin\varphi\cos\Phi = -1244,101724,$$
$$N = 31194,214326,$$
$$A\sin 2\varphi'\cos 2\Phi' = 59560,1180656, \quad A'\sin 2\varphi\cos 2\Phi = 58400,907636,$$
$$P = 117961,025702;$$

de plus

$$M-\frac{8}{5}N+\frac{1}{2}P=9209,45805;$$

ensorte que le premier terme de la valeur de e^2 est

	$=0,0059706841,$
le second terme	$=0,0000032889,$
le troisième	$=0,0000000036$
donc e^2	$=0,0059739766.$

Mais l'aplatissement de la terre,

$$\alpha=1-(1-e^2)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{8}e^4+\ldots\ldots$$

donc

$$\alpha=0,0029914494=\frac{1}{334,29}.$$

Concluons de là que les mesures géodésiques de France et du Pérou, combinées entre elles, donnent le rapport des axes égal à $\frac{333}{334}$.

Ce rapport étant une fois trouvé, on peut calculer la longueur du quart du méridien ainsi qu'il suit.

La formule

$$S=\frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\left\{q\lambda-\frac{q'}{2}\sin 2\lambda+\frac{q''}{3}\sin 4\lambda-\ldots\right\},$$

en y faisant $\lambda=100^\circ$, devient, à cause de $S=Q$, Q étant alors le quart du méridien,

$$Q=\frac{b^2(1+n)^{\frac{3}{2}}}{a}q.100^\circ;$$

on a d'ailleurs

$$A=\frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\left\{\begin{array}{r}q\varphi-q'\sin\varphi\cos\Phi+\frac{q''}{2}\sin 2\varphi\cos 2\Phi\\ -\frac{q'''}{3}\sin 3\varphi\cos 3\Phi\end{array}\right\},$$

ainsi, divisant ces deux équations l'une par l'autre, réduisant en

série, et s'arrêtant toujours aux termes en e^4, il vient, à cause de $\frac{q'}{q} = \frac{3}{4}\left(e^2 + \frac{1}{2}e^4\right)$, $\frac{q''}{2q} = \frac{15}{128}e^4$,

$$Q = \frac{100^c A}{\varphi}\left[1 + \frac{3}{4}\left(e^2 + \frac{1}{2}e^4\right)\frac{\sin\varphi\cos\Phi}{\varphi} - \frac{15}{128}e^4\frac{\sin 2\varphi\cos 2\Phi}{\varphi} + \frac{9}{16}e^4\frac{\sin^2.\varphi\cos^2.\Phi}{\varphi^2}\right],$$

formule qui, étant préparée pour le calcul, se change en celle-ci,

$$Q = \frac{100^c A}{\varphi}\left[1 + \frac{3.200}{4\pi\varphi}\left(e^2 + \frac{1}{2}e^4\right)\sin\varphi\cos\Phi - \frac{15.200}{128\pi\varphi}e^4\sin 2\varphi\cos 2\varphi + \frac{9.40000}{16\,\pi^2\varphi^2}e^4\sin^2.\varphi\cos^2.\Phi\right].$$

et qui est précisément la même que celle à laquelle M. Delambre est parvenu par une autre voie (pag. 676, tom. II de la *Base du Système métrique*), et que j'ai déjà donnée (pag. 132, *Géodésie*).

Supposons, pour application, que l'on veuille calculer la valeur de Q, en partant des mesures exécutées en France, et prenant pour aplatissement $\alpha = \frac{1}{334}$, auquel cas $e^2 = \frac{667}{(334)^2} = 0{,}00597058$, et $\log e^2 = 7{,}77663289$; on trouvera

le 1er terme sous la parenthèse...	=	1,000000000
le 3e terme....................	=	0,000008192
le 4e..........................	=	0,000000035
Somme..........		1,000008227
et le 2e terme	=	— 0,000187349
Ainsi le facteur sous la parenthèse	=	0,999820878;

et comme $A = 551584',72$, il en résulte que

$$Q = 5130739',6952, \quad \text{ou en nombre rond,} \quad Q = 5130740^{\text{toi}}.$$

C'est ce résultat même que la Commission des Poids et Mesures a obtenu; ainsi le mètre, qui est la 10000000ième partie du quart du méridien, = 443lig,296. Cette longueur du mètre définitif est en effet

celle qui est consacrée par les lois françaises : cependant d'après ce qu'on lit à la page 159 de la seconde édition de *l'Astronomie physique* de M. Biot, les derniers résultats de M. Delambre diffèrent un peu de ceux de la Commission ; puisque, selon ce célèbre Astronome, il résulte de la combinaison qu'il a faite lui-même des arcs de méridien mesurés à l'équateur et en France, que l'aplatissement de la terre est $\frac{1}{308,65}$ au lieu de $\frac{1}{334}$. Comme l'on verra en détail, dans le troisième volume de la *Base du Système métrique*, les raisons qui l'ont engagé à modifier les élémens des calculs précédens, je me bornerai à dire, suivant les renseignemens qu'il vient de communiquer au Dépôt de la Guerre, qu'une révision sévère des calculs de l'arc mesuré par Bouguer et Lacondamine, et de ceux de l'arc compris entre Dunkerque et Barcelonne, a fait sentir la nécessité d'augmenter de $371\ \frac{1}{3}$ toises la valeur précédente du quart du méridien. Quoi qu'il en soit, c'est toujours au mètre légal qui est représenté par une règle de platine soumise à la température de la glace fondante, et dont la valeur est de $443^{\text{lig}},296$ de la toise du Pérou, prise à 13° du thermomètre de Réaumur, que l'on doit rapporter, comme par le passé, toutes les mesures géodésiques.

Maintenant de l'équation $Q = \frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}} q \cdot \frac{1}{2}\pi$, π étant toujours la demi-circonférence d'un cercle ayant l'unité pour rayon, l'on tire

$$a = \frac{2Q}{\pi q\,(1-e^2)\,(1+n)^{\frac{3}{2}}}\,;$$

mais

$$n = \frac{e^2}{2} + \frac{e^4}{4} + \frac{e^6}{8}, \quad n^2 = \frac{e^4}{4} + \frac{1}{4}e^6, \quad q = 1 + \frac{15}{16}\left(\frac{e^4}{4} + \frac{e^6}{4}\right).$$

en se bornant aux termes de l'ordre e^6; partant

$$a = \frac{2Q}{\pi}\left(1 + \frac{1}{4}e^2 + \frac{7}{64}e^4 + \frac{15}{256}e^6 \ldots\right)$$

et

$$b = \frac{2Q}{\pi}\left(1 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{9}{64}e^4 - \frac{23}{256}e^6 \ldots\right).$$

Si l'on fait $Q = 10000000^{m,n}$, et qu'on emploie l'aplatissement $\frac{1}{334}$;

on aura, comme je l'ai déjà trouvé (pag. 136 du *Traité de Géodésie*),

$$a = 6375739^{m}, \quad \log.\ a = 6{,}8045305o8\,,$$
$$b = 6356649^{m}, \quad \log.\ b = 6{,}8032283o5\,,$$

et par suite,

$$\begin{aligned} \log \gamma = 6{,}8038779 27 &- 0{,}00195\ 33480\ \cos 2\lambda \\ &+ 0{,}00000\ 14643\ \cos 4\lambda \\ &- 0{,}00000\ 000144\ \cos 6\lambda. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \mathcal{N} \text{ ou } \log \gamma' = 6{,}8051811363 &- 0{,}00065\ 11160\ \cos 2\lambda \\ &+ 0{,}00000\ 04881\ \cos 4\lambda \\ &- 0{,}00000\ 000048\ \cos 6\lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log r = 6{,}803880856 &+ 0{,}00065\ 11131\ \cos 2\lambda \\ &- 0{,}00000\ 14642\ \cos 4\lambda \\ &+ 0{,}00000\ 000328\ \cos 6\lambda. \end{aligned}$$

La méthode par laquelle je suis parvenu à réduire ainsi en séries procédant suivant les multiples des cosinus de la latitude, les logarithmes des diverses lignes du sphéroïde terrestre, est surtout usitée en Astronomie, et dans tous les cas où elle peut rendre les intégrations plus faciles, ou bien lorsque l'on veut calculer les termes d'une série convergente, indépendamment des tables de logarithmes. Mais l'emploi de ces tables permet de développer tout simplement les fonctions $\frac{1}{(1+n\cos z)^{\mu}}$ et $\log(1+n\cos z)^{\mu}$ en séries procédant suivant les puissances des cosinus de l'angle z; parceque l'évaluation de leurs termes ne se fait pas avec moins d'exactitude. On pourrait, par exemple, calculer la valeur du logarithme de la normale $\mathcal{N}$ [n° 7, équat. (1')], à l'aide de la série suivante,

$$\log \mathcal{N} = \log a + \tfrac{1}{2}\log(1+n) - \tfrac{1}{2}K\left(n\cos 2\lambda - \frac{n^2}{2}\cos^2 2\lambda + \frac{n^3}{3}\cos^3 2\lambda - \ldots\right),$$

ou même de cette autre

$$\log \mathcal{N} = \log a + \tfrac{1}{2}K\left(e^2\sin^2\lambda + \frac{e^4}{2}\sin^4\lambda + \frac{e^6}{3}\sin^6\lambda + \ldots\right)$$

qui dérive de l'équation (1) du numéro cité; cependant il importe de choisir parmi les séries d'une même expression, celles qui convergent plus rapidement.

Voici quelles sont les dimensions du globe terrestre que M. Biot donne d'après M. Delambre.

Rayon de l'équateur... $a = 3271864^{t} = 6376784^{m}$
Rayon du pôle....... $b = 3260611^{t} = 6366745^{m}$
Aplatissement...... $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{308,65}$.

Suivant la théorie de la lune, cet aplatissement $= \frac{1}{305}$; et en combinant la longueur de l'arc mesuré récemment en Suède avec celle de l'arc mesuré en France, il est de $\frac{1}{307,4}$: on voit donc que ces résultats se concilient à merveille.

Formules pour calculer les coordonnées rectangles de divers points de la projection, et trouver dans laquelle des feuilles d'une carte se trouvent ces mêmes points.

11. J'ai observé, n° 3, que le tracé de la projection du Dépôt général de la Guerre s'effectuait beaucoup plus commodément à l'aide des coordonnées rectangles des points d'intersection des méridiens et des parallèles; il s'agit donc en ce moment de résoudre ce problème général :

Etant données la latitude et la longitude d'un point du sphéroïde terrestre supposé de révolution, trouver sur la carte les coordonnées rectangles de ce point.

Soit sur cette carte, AC le premier méridien représenté par une ligne droite, AK le moyen parallèle, m le point dont on demande les distances aux axes rectangles CX, CY. Soit en outre bm le parallèle de ce point, C son centre, λ la latitude du point A situé sur le moyen parallèle, σ l'arc Ab égal à la partie correspondante du méridien rectifié, et L la latitude du point b. Fig. 4.

L'expression finie du rayon CA de la projection du parallèle moyen, est, d'après ce qui précède,

$$t = \frac{a \cot \lambda . (1+n)^{\frac{1}{2}}}{(1 + n \cos 2\lambda)^{\frac{1}{2}}},$$

et celle du rayon $Cb = R$ de la projection d'un parallèle quelconque bm, est

$$R = t + \sigma, \quad \text{ou} \quad R = \frac{a \cot \lambda . (1+n)^{\frac{1}{2}}}{(1 + n \cos 2\lambda)^{\frac{1}{2}}} + \sigma;$$

dans laquelle

$$\sigma = \frac{Q}{100^\circ}\left\{ \begin{array}{r} (\lambda - L) - \frac{q'}{q}\sin(\lambda - L)\cos(\lambda + L) + \frac{q''}{2q}\sin 2(\lambda - L)\cos 2(\lambda + L) \\ - \frac{q'''}{3q}\sin 3(\lambda - L)\cos 3(\lambda + L) \end{array} \right\};$$

mais pour la carte de l'Empire Français, la latitude du parallèle moyen étant de 50°, on a $\lambda = 50^\circ$, et par suite

$$t = a(1+n)^{\frac{1}{2}} = \frac{a}{\left(1 - \frac{e^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}}};$$

développant en série, il vient

$$t = a\left[1 + 1.\left(\frac{e}{2}\right)^2 + \frac{1.3}{2}\left(\frac{e}{2}\right)^4 + \frac{1.3.5}{2.3}\left(\frac{e}{2}\right)^6 + \frac{1.3.5.7}{2.3.4}\left(\frac{e}{2}\right)^8 + \ldots\right];$$

de sorte que le terme général est

$$+ a . \frac{1.3.5.7 \ldots\ldots (2i-3)}{2.3.4 \ldots\ldots (i-1)}\left(\frac{e}{2}\right)^{2(i-1)};$$

mais d'ailleurs cette valeur de t n'est autre que celle de la normale ♑ menée par le point dont la latitude $\lambda = 50^\circ$; donc

$$\log t = 6{,}8051806\,48 \quad \text{et} \quad t = 6385290^m.$$

Dans la même circonstance, $\lambda - L = 50^\circ - L$; soit donc $50^\circ - L = \varphi$, on aura, en prenant φ en parties du rayon,

$$\sigma = \frac{Q}{\frac{1}{2}\pi}\left[\varphi - \frac{q'}{q}\sin^2\varphi - \frac{1}{2} . \frac{1}{2}\frac{q''}{q}\sin 4\varphi + \frac{1}{3}\frac{q'''}{q}\sin^2 .3\varphi - \frac{1.1}{2.4}\frac{q^{\text{IV}}}{q}\sin 8\varphi \ldots\right];$$

parcequ'en général $\sin(100 - 2L)\cos(100 + 2L) = -\frac{1}{2}\sin 4(50 - L)$.

On suppose, dans cette formule, que σ est austral par rapport au parallèle moyen; s'il était boréal, φ serait négatif ou égal à $L - 50$,

et

et alors on aurait, abstraction faite du signe de σ,

$$(G)\ldots\sigma=\frac{Q}{\frac{1}{2}\pi}\left[\varphi+\frac{q'}{q}\sin^2\varphi-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{q''}{q}\sin 4\varphi-\frac{1}{3}\frac{q'''}{q}\sin^2 3\varphi-\frac{1.1q^{\text{IV}}}{2.4q}\sin 8\varphi\ldots\right].$$

Exprimant les coefficiens $\frac{q'}{q}$, $\frac{q''}{q}$, $\frac{q'''}{q}$, ... en fonctions de e, et poussant l'approximation jusqu'aux termes en e^6 inclusivement, on obtiendra donc pour la région australe,

$$\sigma=100000''\varphi-28633'',49\sin^2\varphi-13'',41\sin 4\varphi+0'',031\sin^2 3\varphi-\ldots,$$

et pour la région boréale,

$$\sigma=100000''\varphi+28633'',49\sin^2\varphi-13'',41\sin 4\varphi-0'',031\sin^2 3\varphi-\ldots,$$

φ étant pris en grades.

Il résulte de cette dernière hypothèse;

$$R=t-\sigma=6585290''-\sigma.$$

Maintenant, soit p la longitude du point du sphéroïde dont M est la projection, cette longitude étant comptée du méridien rectiligne de la carte; et θ l'angle que les deux rayons CM, CA font entre eux: on aura d'abord la longueur de l'arc $BM=s_1$ par la formule Fig. 4.

$$s_1=\frac{a\pi(1+n)^{\frac{1}{2}}\cos L}{(1+n\cos 2L)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{p}{200};$$

puisque le rayon du parallèle passant par la latitude L est $\rho=\frac{a\cos L.(1+n)^{\frac{1}{2}}}{(1+n\cos 2L)^{\frac{1}{2}}}$.

Ensuite, à cause que les amplitudes de deux arcs de même longueur sont entre elles réciproquement comme leurs rayons, l'on a

$$p:\theta::R:\frac{a(1+n)^{\frac{1}{2}}\cos L}{(1+n\cos 2L)^{\frac{1}{2}}},$$

d'où

$$(H)\ldots\ldots\theta=\frac{ap\cos L.(1+n)^{\frac{1}{2}}}{R(1+n\cos 2L)^{\frac{1}{2}}}=p\cos L.\left(\frac{\varpi}{R}\right),$$

$\mathfrak{N}$ étant la normale relative au point L, ou le rayon de courbure γ' de l'arc perpendiculaire au méridien à ce même point. Si donc X et Y sont les coordonnées rectangles CP, PM du point M, comptées du centre des parallèles, on aura

$$X = R\cos\theta, \quad Y = R\sin\theta.$$

Pour une longitude p' autre que p, on aura de même, en désignant par θ', R', X', Y' et L' ce que deviennent respectivement θ, R, X, Y et L,

$$\theta' = \frac{ap'\cos L' . (1+n)^{\frac{1}{2}}}{(1+n\cos 2L')^{\frac{1}{2}}} = p'\cos L' . \left(\frac{\mathfrak{N}'}{R'}\right)$$

et

$$X' = R'\cos\theta', \quad Y' = R'\sin\theta'.$$

Afin d'éviter l'emploi de trop grands nombres pour représenter les coordonnées des points de la carte, j'ai déjà dit que l'on plaçait ordinairement l'origine au point A, centre du développement; ainsi en désignant AP par x, et remplaçant Y par y, afin d'établir plus de symétrie dans la notation, l'on aura

$$X = t - x = R + \sigma - x,$$

et parconséquent

$$R + \sigma - x = R\cos\theta;$$

d'où

$$x = \sigma + R(1 - \cos\theta) = \sigma + 2R\sin^2\tfrac{1}{2}\theta$$
$$= t - R\cos\theta,$$

ou plus simplement

$$x = \sigma + R\frac{(1-\cos\theta)\sin\theta}{\sin\theta}$$
$$= \sigma + y\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\theta;$$

les coordonnées rectangles, à partir du centre du développement, sont donc

$$x = t - R\cos\theta, \qquad Y = R\sin\theta,$$

ou

$$x = \sigma + y\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\theta, \qquad y = R\sin\theta.$$

Si l'origine des axes était transportée à l'un des angles d'une

feuille (n° 3), que l'on désignât par $x_{(o)}$, $y_{(o)}$ les coordonnées de ce point, rapportées au centre A du développement, et par x', y' celles d'un point quelconque de la carte, comptées de l'angle dont il s'agit, on aurait en général Fig. 5.

$$x' = x - x_{(o)}\,, \quad y' = y - y_{(o)}.$$

Or d'après cette convention que les cartes doivent avoir $o^m,5$ de hauteur sur o^m8 de longueur, $x_{(o)}$ sera un certain multiple de $o^m,5$, et $y_{(o)}$ un certain autre multiple de $o^m,8$; de sorte que l'on aura

$$x_{(o)} = o^m,5.\mu\,, \qquad y_{(o)} = o^m,8.\mu'\,,$$

et

$$\frac{x}{o,5} = \mu + \xi\,, \qquad \frac{y}{o,8} = \mu' + \xi',$$

μ et μ' étant des entiers, et ξ, ξ' des quantités respectivement plus petites que l'unité. Il suffit donc dans les applications, pour connaître μ et μ', d'obtenir seulement la partie entière des quotiens $\frac{x}{o,5}$ et $\frac{y}{o,8}$.

Jusqu'à présent j'ai implicitement supposé que la carte à construire devait être à l'échelle de 1 pour 1; mais comme en général elle doit être dressée à l'échelle de $\frac{1}{g}$, g étant un nombre entier, il est évident qu'il est nécessaire que toutes les quantités qui constituent les valeurs des coordonnées d'un point, soient multipliées par la fraction $\frac{1}{g}$, excepté toutefois les valeurs de $x_{(o)}$ et $y_{(o)}$ qui sont absolues, puisqu'elles sont indépendantes de l'échelle de la carte. De cette manière, le rang qu'occupe, dans la série des feuilles de la carte, celle qui contient le point à construire, sera déterminé par les deux nombres entiers $\mu + 1$, $\mu' + 1$; le premier, ainsi qu'il est dit, n° 4, s'écrira au milieu de la hauteur de cette feuille, et le second au milieu de sa longueur.

Telles sont les formules qui donnent les coordonnées rectilignes d'un point quelconque de la projection. Les calculs seraient extrêmement pénibles et fastidieux, s'il fallait toujours avoir recours à ces formules pour déterminer tous les points d'intersection des projec-

tions des méridiens et des parallèles tracées de décigrades en décigrades; mais heureusement qu'en pareil cas les méthodes d'interpolation sont d'un grand secours. M. Plessis, Capitaine au Corps impérial des Ingénieurs-Géographes, qui est chargé, depuis environ deux ans, de dresser des tables relatives à la projection actuelle, s'acquitte de ce travail avec beaucoup de zèle et d'intelligence. Ses tables déjà fort avancées, malgré leur immense étendue, et dans lesquelles on trouvera immédiatement les coordonnées de 80000 points, seront infiniment précieuses pour la Topographie, en ce qu'elles réduiront le tracé de la projection d'une carte à une opération purement mécanique, et pourront servir pour toute portion de zône dont le parallèle moyen passerait par la latitude de 50^G, qui serait bordée dans un sens par deux méridiens ayant 40^G de différence en longitude, et dans l'autre sens, par les parallèles des 30ième et 70ième grades. En attendant la publication de ces résultats, l'on trouvera dans le mémoire de M. Henry, cité page 21, des tables subsidiaires que cet Ingénieur a calculées dans la vue de diminuer beaucoup le calcul des coordonnées des points d'une carte comprise dans les limites dont je viens de parler: on verra au chapitre III que j'ai rempli le même objet.

12. Voyons maintenant comment l'on peut résoudre le problème inverse, c'est-à-dire, déterminer la latitude et la longitude d'un point de la carte, dont on connaît les coordonnées rectangles X, Y.

D'abord des équations

$$X = R\cos\theta, \qquad Y = R\sin\theta,$$

l'on tire sur-le-champ

$$\tang\theta = \frac{Y}{X},$$

et au moyen de l'angle θ connu, l'on déterminera R par l'une de ces deux formules $R = \frac{Y}{\sin\theta}$ ou $R = \frac{X}{\cos\theta}$; puis à cause de $R = t - \sigma$ on aura

$$\sigma = t - R = 6385290^m - R;$$

ensuite la formule (G), en supposant que σ soit boréal, pourra être

transformée en celle-ci

$$\frac{\frac{1}{2}\pi\sigma}{Q} = \frac{\frac{1}{2}\pi\sigma}{10000000^m} = \varphi + B\varphi^2 + C\varphi^3 + D\varphi^4 + \ldots\ldots$$

ou

$$z = \varphi + B\varphi^2 + C\varphi^3 + D\varphi^4 \ldots\ldots,$$

série qui sera nécessairement convergente, attendu que l'arc φ est fort petit pour toute l'étendue de la carte. Alors, par le retour des suites, on aura

$$\varphi = A'z + B'z^2 + C'z^3 + D'z^4 + \ldots\ldots$$

Ici φ sera donné en parties du rayon pris pour unité; on le convertira donc en grades, et ensuite on aura

$$L = 50^G + \varphi.$$

Telle sera la latitude du point que l'on considère. Mais il est un moyen plus direct et plus élégant d'obtenir la valeur de l'angle φ en série ordonnée suivant les puissances de l'arc σ : en effet, par le théorème de Taylor, on a en général, en désignant par λ et L les latitudes des extrémités de σ,

$$L - \lambda = \varphi = \left(\frac{dL}{d\sigma}\right)\sigma + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2L}{d\sigma^2}\right)\sigma^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3L}{d\sigma^3}\right)\sigma^3 + \ldots\ldots$$

les valeurs des coefficiens différentiels étant déterminées pour le cas où $\sigma = 0$. Or, à cause de $\left(\frac{dL}{d\sigma}\right) = \frac{(1 - e^2\sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}}{a(1 - e^2)} = \frac{1}{\gamma}$; $\mathfrak{N} = \frac{a}{(1 - e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}} = \gamma'$, on a, tout calcul fait,

$$\varphi = \frac{\sigma}{\gamma} - \frac{3a^2e^2\sin 2\lambda}{4b^2\gamma\gamma'}\sigma^2 - \frac{a^2e^2}{2b^2}\left[\frac{\cos 2\lambda}{\gamma^2\gamma'} - \frac{e^2\sin^2.2\lambda}{4\gamma}\left(\frac{3a^2}{b^2\gamma'^2} + \frac{\gamma'}{a^2\gamma}\right)\right]\sigma^3,$$

ou en rejetant les termes en e^4 et réduisant en grades,

$$\varphi = \frac{200}{\pi}\left(\frac{\sigma}{\gamma} - \frac{3a^2e^2\sin 2\lambda}{4b^2\gamma\gamma'}.\sigma^2 - \frac{a^2e^2\cos 2\lambda}{2b^2\gamma^2\gamma'}\sigma^3\right);$$

π représentant la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon est l'unité.

Au surplus, puisque, pour la carte de l'Empire Français, $\lambda = 50^\circ$, cette série se réduit à

$$\varphi = \frac{200}{\pi}\frac{\sigma}{\gamma} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sin 1''}\frac{a^2e^2\sigma^2}{b^2\gamma\gamma'},$$

γ et γ' étant les rayons de plus petite et de plus grande courbure de l'ellipsoïde à cette même latitude, rayons que j'ai respectivement désignés par r et r' (pag. 23, *Traité de Topographie*).

Bien entendu que si σ était austral par rapport au moyen parallèle de la carte, on aurait, abstraction faite du signe de φ,

$$\varphi = \frac{200}{\pi}\frac{\sigma}{\gamma} + \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sin 1''}\frac{a^2e^2\sigma^2}{b^2\gamma\gamma'}.$$

Mais, pour les besoins ordinaires de la Géographie, il existe un procédé graphique suffisamment exact, extrêmement simple, et qui remplace avec avantage la solution précédente. Voici en quoi il consiste:

Par le point donné sur la carte, où je suppose que les méridiens et les parallèles sont tracés de décigrades en décigrades, auquel cas les quadrilatères formés par ces lignes sont sensiblement des parallélogrammes, on mènera deux droites respectivement parallèles aux côtés de ces quadrilatères divisés en centigrades, et l'on connaîtra, à l'aide des divisions dont il s'agit et de la graduation marquée autour de la feuille, la latitude et la longitude du point donné.

Si le quadrilatère dans lequel est renfermé ce point ne pouvait pas être réellement assimilé à un parallélogramme, les deux droites à mener dans le sens des parallèles et des méridiens devraient concourir avec ces lignes : du reste la latitude et la longitude cherchées s'évalueraient comme dans le premier cas. Cette opération est trop simple pour qu'il soit nécessaire d'entrer dans de plus grands détails ; cependant j'observerai encore que l'usage du compas de proportion dispense de diviser effectivement les côtés du quadrilatère en parties égales.

Détermination des angles des quadrilatères formés, sur la carte, par les méridiens et les parallèles, et recherche du rayon de courbure d'un méridien quelconque.

13. Soit BM un parallèle et $M\Pi$ un méridien quelconques de la carte. Si par le point M d'intersection de ces deux courbes, on leur mène respectivement les tangentes MH, MT, l'angle HMT, dont l'ouverture est tournée vers l'axe des X et le centre C des parallèles, sera celui qu'il s'agit de déterminer : or le rayon CM du parallèle BM étant perpendiculaire à la tangente MH, il suffit de connaître la valeur de l'angle $TMC = u$, qu'il faudra parconséquent, pour le cas de la figure, retrancher du quadrant ; ainsi Fig. 6

$$\text{angle } HMT = 100^\circ - u.$$

D'un autre côté, le triangle rectiligne MCT donnant $u = \psi - \theta$, on a

$$\operatorname{tang} u = \frac{\operatorname{tang}\psi - \operatorname{tang}\theta}{1 + \operatorname{tang}\psi \operatorname{tang}\theta};$$

d'ailleurs MT étant la tangente à la courbe $M\Pi$ dont les coordonnées de ses points sont généralement

$$X = R\cos\theta, \quad Y = R\sin\theta,$$

on a

$$dX = dR\cos\theta - R\,d\vartheta\sin\theta$$
$$dY = dR\sin\theta + R\,d\vartheta\cos\theta,$$

et à cause de $\operatorname{tang}\psi = \frac{dY}{dX}$, $dR = d\sigma$, il s'ensuit que

$$\operatorname{tang} u = \frac{R\,d\vartheta}{d\sigma}.$$

Pour avoir ensuite une valeur de tang u délivrée de différentielles, on voit qu'il n'y a qu'à différencier l'équation (H) ; car il vient

$$d\vartheta = -\frac{d\sigma}{R}\theta + \frac{\alpha p\,(1-e^2)\sin L.(1+n)^{\frac{3}{2}}}{R\,(1+n\cos 2L)^{\frac{3}{2}}}.dL,$$

vu que plus la latitude L augmente, plus l'angle θ et le rayon R diminuent; mais

$$dL = \frac{d\sigma.(1+n\cos 2L)^{\frac{3}{2}}}{a(1-e^2)(1+n)^{\frac{3}{2}}},$$

donc

$$\frac{d\theta.R}{d\sigma} = p \sin L - \theta;$$

donc enfin

$$\text{tang } u = p \sin L - \theta = p\left[\sin L - \left(\frac{Tb}{R}\right)\cos L\right],$$

ou plutôt pour l'homogénéité,

$$(\text{K})\ldots\ \text{tang } u = \frac{\pi}{200^g}(p \sin L - \theta),$$

lorsque p et θ sont donnés en grades.

Il est facile de prouver que l'angle u est nul pour tous les points du parallèle moyen d'une carte quelconque; en effet lorsque $L = \lambda$, on a

$$\theta = \frac{ap\cos\lambda.(1+n)^{\frac{1}{2}}}{t(1+n\cos 2\lambda)^{\frac{1}{2}}}, \quad t = \frac{a\cot\lambda.(1+n)^{\frac{1}{2}}}{(1+n\cos 2\lambda)^{\frac{1}{2}}},$$

parconséquent

$$\theta = \frac{p\cos\lambda}{\cot\lambda} = p\sin\lambda;$$

mais alors $p \sin L = p \sin \lambda$, donc $u = 0$.

Il est en outre facile d'assigner le signe de u pour les régions boréale et australe dont le parallèle moyen forme la limite commune; car lorsque $L = 0$, on a

$$\text{tang } u = -\frac{\pi\theta}{200};$$

u est donc négatif: ainsi dans toute l'étendue de la région australe, l'angle $HMT = 100^g - u$ est plus grand qu'un quadrant. Dans celle du nord, au contraire, cet angle est plus petit.

14. Avant de rechercher l'expression du rayon de courbure de la projection d'un méridien, voyons quelle est celle de la différentielle d'un arc s de cette projection: or l'expression générale de cette

différentielle

différentielle étant

$$ds = \sqrt{dX^2 + dY^2},$$

on trouve, en y substituant les valeurs de dX et dY,

$$ds = dR\sqrt{1 + \left(\frac{Rd\theta}{dR}\right)^2} = dR\,\sqrt{1 + \text{tang}^2 u}$$
$$= \frac{dR}{\cos u};$$

et puisque $dR = d\sigma$, on a

$$ds = \frac{d\sigma}{\cos u}.$$

On doit conclure de cette équation que si l'angle u était invariable, l'on aurait en intégrant, $s = \frac{1}{\cos u}\,\sigma$ sans constante, puisque s et σ sont nuls à la fois; mais cet angle variant très-peu d'un point à un autre fort voisin, il s'ensuit que les petits arcs de méridien très-proches les uns des autres, conservent sensiblement, sur la carte, les mêmes rapports que sur le sphéroïde terrestre, et y sont à fort peu près rectilignes. Donc une petite partie d'une ligne géodésique quelconque est très-peu altérée en projection.

Comme il n'est pas possible d'intégrer rigoureusement l'équation différentielle $ds = \frac{d\sigma}{\cos u}$, voyons du moins si dans quelques cas particuliers elle est susceptible de se présenter sous une forme commode pour l'intégration par les séries. D'abord, en prenant l'équateur même pour moyen parallèle de la carte, on a $\lambda = 0$; alors t et R sont infinis, la valeur de θ est nulle, et l'on a

$$\text{tang}\, u = p \sin L,$$

d'où

$$\cos u = \frac{1}{(1 + p^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}$$

et

$$u = p \sin L - \tfrac{1}{3}p^3\sin^3 L + \tfrac{1}{5}p^5\sin^5 L - \ldots.$$

ou, pour l'homogénéité, et en désignant les grades par G,

$$u^G = p \sin L - \left(\frac{\pi}{200}\right)^2\frac{p^3}{3}\sin^3 L + \left(\frac{\pi}{200}\right)^4\frac{p^5}{5}\sin^5 L - \ldots.$$

ensuite, à cause de $d\sigma = \frac{b^2}{a}\left(\frac{1+n}{1+n\cos 2L}\right)^{\frac{3}{2}} dL$, la valeur précédente de ds devient

$$ds = \frac{b^2}{a}\left(\frac{1+n}{1+n\cos 2L}\right)^{\frac{3}{2}}(1+p^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}\,dL.$$

Or, pour ce cas particulier, tous les parallèles de la carte deviennent des lignes droites, comme dans la projection même que Flamstéed a employée dans son *Atlas Céleste*. Le moyen de faire convenir nos formules à cette dernière projection, est de supposer $a = b$, ou $n = 0$; ainsi, pour la sphère, on a simplement

$$ds = adL\ \sqrt{1+p^2\sin^2 L}, \quad \text{et} \quad s = a\int dL\,(1+p^2\sin^2 L)^{\frac{1}{2}}.$$

Cette intégrale dépend nécessairement de la rectification d'un arc d'ellipse ayant pour demi-axes a et $a\sqrt{1+p^2}$; car si l'on prend une abscisse $x = a\sin L$, la formule $ds = \frac{dx\sqrt{a^4-e^2x^2}}{\sqrt{a^2-x^2}}$ qui exprime la différentielle d'un arc d'ellipse dont les demi-axes sont a et b, s'identifiera avec la précédente en faisant les substitutions convenables. On peut voir dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, pour l'année 1786, pag. 621 et suivantes, comment M. Legendre obtient l'intégrale dont il s'agit, en série convergente, quelque soit d'ailleurs le rapport des axes de l'ellipse.

Je ne m'arrèterai pas à prouver que, dans cet état de choses, on a

$$x = \sigma = aL \quad \text{et} \quad y = s_{,} = ap\cos L,$$

ou plutôt

$$x = a\frac{\pi}{200}L, \qquad y = s_{,} = ap\frac{\pi}{200}\cos L,$$
$$= 100000^m L, \qquad = 100000^m p\cos L,$$

lorsque L et p sont données en grades.

Fig. 7. 15. Maintenant soit ζ le rayon de courbure cherché, et v l'angle formé par deux rayons de courbure consécutifs. La théorie connue donne

$$\zeta = \frac{ds}{v};$$

mais v est évidemment la différentielle de l'angle que le rayon de courbure ζ fait avec l'axe des abscisses, angle qui est égal à $100^\circ - \psi = 100^\circ - u - \theta$; on a donc

$$\zeta = \frac{ds}{-d(u+\theta)} = \frac{dr}{-\cos u . d(u+\theta)};$$

d'ailleurs à cause de tang $u = p \sin L - \theta$, on obtient, en faisant attention que u et L augmentent pendant que θ diminue,

$$d.(u+\theta) = du - d\theta \quad \text{et} \quad du - d\theta = du \cos^2 u \cos L dL - d\theta \sin^2 u;$$

de plus, parceque $dL = \frac{dr\,(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{3}{2}}}{a\,(1 - e^2)}$, $d\theta = \frac{dr}{R} \text{tang}\, u$, on trouve après les substitutions,

$$\zeta = \frac{Ra\,(1 - e^2)}{a\,(1 - e^2) \sin^2 u - Rp \cos L \cos^2 u\,(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{3}{2}}}.$$

Pour tous les points du parallèle moyen de la carte, $u = 0$ et $L = \lambda$; l'expression précédente se réduit alors à la suivante

$$\zeta = \frac{Ra\,(1 - e^2)}{-Rp \cos \lambda\,(1 - e^2 \sin^2 \lambda)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\gamma}{-p \cos \lambda},$$

γ étant le rayon osculateur du méridien elliptique à la latitude λ. De là il est aisé de comparer entre elles les courbures des parallèles et des méridiens.

Méthodes pour déterminer les points d'intersection des méridiens et des parallèles avec les lignes du cadre.

16. L'équation d'un parallèle est, en prenant le point C pour origine des coordonnées, Fig. 6

$$X^2 + Y^2 = R^2;$$

mais, par ce qui précède,

$$X = t - x = t - x_{(0)} - x' \quad \text{et} \quad Y = y' + y_{(0)}:$$

cette équation devient donc, en faisant $t - x_{(0)} = t_{(0)}$, pour

abréger ;

$$(t_{(o)} - x')^2 + (y_{(o)} + y')^2 = R^2.$$

Soit en général

$$x' = x_\mu$$

l'équation d'une droite parallèle à l'axe des y' ou à la base du rectangle qui représente une feuille ; alors les coordonnées x', y' du point d'intersection de ces deux lignes seront

$$x' = x_\mu \quad \text{et} \quad y' = -y_{(o)} \pm \sqrt{R^2 - (t_{(o)} - x_\mu)^2}.$$

Relativement à la carte de France, les intersections avec les bases de la feuille se détermineront en faisant successivement, dans la valeur ci-dessus de y', $x_\mu = 0^m,5$ et $x_\mu = 0$: si cette valeur est imaginaire, le parallèle ne coupera aucune des bases dont il est question. Dans ce cas, soit

$$y' = y_\mu$$

l'équation d'une droite parallèle à la hauteur de la feuille, on aura généralement

$$x' = t_{(o)} \pm \sqrt{R^2 - (y_{(o)} + y_\mu)^2}.$$

Les valeurs particulières de x' s'obtiendront en faisant successivement dans cette formule, $y_\mu = 0^m,8$ et $y_\mu = 0$: ce qui est de toute évidence. D'après la fixation préalable des sommets des angles des quadrilatères formés par les méridiens et les parallèles, on jugera sur-le-champ laquelle de ces deux formules doit être employée. Il est inutile d'observer qu'il faudra multiplier par le rapport $\frac{1}{g}$ de l'échelle, les élémens R et t de ces mêmes formules, afin de les avoir en parties du mètre réel : de cette manière les valeurs de y' et x' seront elles-mêmes absolues et pourront être portées immédiatement sur la carte. Cependant lorsque la courbure des parallèles sera insensible dans l'intervalle d'un méridien à un autre, comme dans la figure 8, on pourra tracer de suite la portion de parallèle qui doit couper les lignes du cadre, en l'assujétissant à faire avec le méridien, un angle égal à celui du quadrilatère à former : cet angle sera donné soit pour la formule du n° 13, que l'on peut

réduire en table, soit par l'un des quadrilatères déjà construits dans l'intérieur du cadre de la feuille, et le plus voisin de celui dont il est question.

Les projections des méridiens étant en général des courbes transcendantes, la solution rigoureuse du problème actuel serait extrêmement compliquée ; mais il est heureusement permis, dans cette circonstance, de considérer ces lignes comme des courbes du genre parabolique, et de faire usage des méthodes d'interpolation, pour trouver leurs points d'intersection avec les lignes du cadre de la carte. Parmi ces méthodes, je choisirai celle que M. Lagrange a exposée dans ses *Leçons aux Ecoles Normales*, parcequ'elle est fort simple et qu'elle se prête aisément au calcul logarithmique.

D'abord si dans toute l'étendue d'une feuille ayant les dimensions prescrites par le Dépôt général de la Guerre, les méridiens ont une courbure insensible, on pourra sans inconvénient les assimiler à une ligne droite ; et pour lors, si l'on ne connaît que deux points d'un méridien, la théorie des lignes proportionnelles sera applicable à la solution du problème proposé, toutes les fois que ces deux points seront trop près l'un de l'autre pour pouvoir donner avec assez de précision, la direction de la droite qui les unit. Dans tous les autres cas, voici comment on procédera : Fig. 8.

Soient $x_1\ y_1$; $x_2\ y_2$; $x_3\ y_3$....... les coordonnées des points $M_1\ M_2\ M_3$..... de l'un des méridiens de la carte, et comptées de l'angle le plus voisin du centre du développement ; points qui représentent les intersections des parallèles avec ce méridien. Soient en outre $x_\mu\ y_\mu$ les coordonnées d'un point quelconque de la courbe $M_1 \ldots M_3$. Cela posé, on a, par la méthode de M. Lagrange,

$$y_\mu = Ay_1 + By_2 + Cy_3 \ldots .$$

A, B, C.... étant des coefficiens dont les valeurs sont

$$A = \frac{(x_\mu - x_2)(x_\mu - x_3)(x_\mu - x_4)\ldots}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)\ldots}$$

$$B = \frac{(x_\mu - x_1)(x_\mu - x_3)(x_\mu - x_4)\ldots}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)\ldots}$$

$$C = \frac{(x_\mu - x_1)(x_\mu - x_2)(x_\mu - x_4)\ldots}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)\ldots}$$

....

(*Voyez* la seconde édition de mon *Recueil de Propositions de Géométrie*, page 218, ou le *Calcul différentiel* de Lacroix).

Il sera toujours suffisant de n'employer que trois points; deux dans l'intérieur de la carte, et un au-dehors : alors on aura simplement

$$y_\mu = \frac{(x_\mu - x_2)(x_\mu - x_3)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{(x_\mu - x_1)(x_\mu - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 + \frac{(x_\mu - x_1)(x_\mu - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3,$$

et lorsqu'on fera $x_\mu = 0$, cette valeur se réduira à

$$y_\mu = \frac{x_2 x_3}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} y_1 + \frac{x_1 x_3}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} y_2 + \frac{x_1 x_2}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} y_3.$$

L'application de ces formules demande qu'on ait égard aux signes qui doivent affecter les coordonnées des points connus. Si les méridiens coupent les hauteurs de la feuille, il faudra, dans ces deux formules, changer y en x, *et vice versâ*, et faire ensuite $y_\mu = 0^m,8$ dans la première, où maintenant $x_\mu = 0^m5$, en vertu de la convention établie. Cette méthode qui a toute la généralité desirable, et qui est d'ailleurs fort courte, pourrait aussi être adoptée relativement aux parallèles. Au surplus, quel que soit le procédé qu'on emploie, il importe de tracer les méridiens et les parallèles avec beaucoup de soin et de précision, afin qu'après l'assemblage des feuilles, on n'aperçoive ni rupture ni rebroussement dans les lignes qui doivent se réunir et former des courbes continues. Il est vrai que cette condition est bien difficile à remplir pour la gravure, parceque le retrait du papier, après l'impression, ne se fait pas toujours également pour toutes les feuilles; aussi lorsqu'on veut parer à cet inconvénient le plus qu'il est possible, a-t-on soin d'éprouver d'avance le papier destiné à la gravure de la Topographie.

Méthodes pour projeter, sur la carte, un triangle dont la projection de la base est connue.

17. *Première solution.* Pour résoudre graphiquement ce problème, je supposerai que les projections des côtés d'un triangle sont sensiblement des lignes droites, et que les quadrilatères formés par les

méridiens et les parallèles de la carte, peuvent être considérés comme des parallélogrammes; hypothèse qui se vérifie dans la pratique : or, soit *M* la projection d'une des extrémités du côté connu *MN* dans le quadrilatère *ABCD*; on projettera d'abord ce point *M* dans le rectangle *ABC'D'* ainsi qu'il suit. Fig. 9.

Par le sommet de l'angle *D* et par le point *M*, on mènera la droite *DK*, puis l'on joindra *D'K*, et ayant mené *MM'* parallèlement à *AB*, le point *M'* sera, dans le rectangle *AD'C'B*, la projection du point *M*.

Soit *N* la projection de l'autre extrémité de la base du triangle proposé dans le quadrilatère *ABCD*; on projettera de même ce point dans le rectangle *ABC'D'*, à l'aide des droites *CNL*, *C'L* et de la parallèle *NN'* au côté *AB* : alors la droite *M'N'* sera le côté du triangle dont il s'agit, sur une carte où les quadrilatères seraient rectangles, c'est-à-dire où la projection orthogonale ne différerait pas de la projection modifiée de Flamstéed, ainsi qu'il est très-aisé de s'en rendre raison. Si donc sur *M'N'* on construit, sans aucune altération, le triangle donné *M'N'P'*, ensuite que l'on projette, par la méthode précédente, le point *P'* dans le quadrilatère *ABCD*, le triangle *MNP* sera celui qu'il fallait construire sur la carte *ABCD*. Voici, au surplus, comment on obtient cette dernière projection:

Soit menée la droite *C'P'M*, ensuite *MN* parallèle à *AB*, puis *NC*, et enfin *P'P* parallèle à *CD*; le point *P* sera la projection cherchée. Fig. 10.

Cette construction extrêmement simple, et qui évite tout calcul, peut être employée pour projeter sur la carte tous les triangles secondaires, dont on ne calcule ordinairement ni les latitudes, ni les longitudes des sommets.

Deuxième solution. Si on voulait résoudre ce problème par le calcul, il faudrait déterminer la projection des angles adjacens à la base donnée *MN*; ce qui exigerait que l'on eût une formule pour déterminer la projection d'un angle formé sur le sphéroïde par un méridien et une autre ligne quelconque de plus courte distance; car tout angle étant toujours la différence des azimuths de ses côtés, il est Fig. 9.

évident que sa projection serait aussi la différence des projections de ces mêmes azimuths.

Fig. 11. Cela posé, soit gfh un angle formé sur la terre par un méridien fg et un côté fh de triangle, et GFH la projection de cet angle sur la carte. Si l'on conçoit deux parallèles à l'équateur, fn, ph infiniment proches l'un de l'autre, le triangle élémentaire fgh, rectangle en g, donnera $\frac{gh}{fg} = \operatorname{tang} f$: mais par la propriété de la projection, les arcs correspondans gh, GH sont égaux; et, sur la carte, les deux triangles infiniment petits HKF, FKG sont rectangles; de plus $FK = fg = dR$, R étant comme ci-devant le rayon du parallèle FN; ainsi angle GFH ou $F = GFK + KFH$, et $gh = GK + KH$; par suite

$$\operatorname{tang} f = \frac{GK + KH}{fg} = \frac{GK}{FK} + \frac{KH}{FK};$$

d'ailleurs

$$\frac{GK}{FK} = \operatorname{tang} u, \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} KFH = \operatorname{tang}(F - u) = \frac{KH}{FK};$$

donc

$$\operatorname{tang} f = \operatorname{tang}(F - u) + \operatorname{tang} u;$$

et enfin

$$\operatorname{tang}(F - u) = \operatorname{tang} f - \operatorname{tang} u = \frac{\sin(f - u)}{\cos f \cos u}.$$

Dans cette formule, u est connu, puisque par le n° 13, on a $\operatorname{tang} u = p \sin L - \theta$: il est donc possible de déterminer la projection F de l'angle f, et par suite de résoudre numériquement le problème proposé.

Lorsque l'angle u est fort petit, comme il arrive, même aux limites de la carte de l'Empire Français, l'angle f et sa projection F diffèrent fort peu l'un de l'autre. Dans la même circonstance, les petites distances mesurées sur la terre sont très-peu altérées sur la carte (n° 14) : ainsi l'on peut poser en principe, que, non loin de l'origine des méridien et parallèle moyens, les petites figures formées sur le globe terrestre, et leurs projections, sont à fort peu près semblables : voilà pourquoi l'on est autorisé à figurer le terrain sur les bandes mêmes assujéties à la projection modifiée de Flamstéed. Au surplus, quoique

quoique dans la rigueur mathématique cette projection et l'orthogonale ne peuvent jamais coïncider, les erreurs commises dans les levés en procédant de la sorte, au lieu de s'accroître sans cesse, s'arrêtent au contraire à tous les points trigonométriques qui servent de points de raccordement, et qui ont été projetés exactement sur les bandes.

Propriétés singulières de cette projection.

18. On doit placer au rang des propriétés dont jouit la projection dont il s'agit, celles qui naissent des remarques que j'ai déjà faites dans le cours de ce Supplément; savoir :

1°. Sur le méridien rectiligne de la carte et les parallèles, les longueurs sont les mêmes que sur le globe terrestre.

2°. Tous les méridiens coupent à angles droits le parallèle moyen.

3°. Les petits arcs de méridien ayant même amplitude, sont sensiblement égaux entre eux, au voisinage de ce parallèle, ou du méridien moyen.

4°. La présente projection s'identifie absolument avec celle de Flamstéed proprement dite, lorsque l'on prend l'équateur même pour parallèle moyen; auquel cas les méridiens et les autres parallèles sont placés symétriquement de part et d'antre du centre du développement.

J'ai à prouver maintenant que les projections des aires du sphéroïde terrestre sont dans les mêmes rapports que ces aires. Pour cet effet, je dénoterai par Σ l'aire d'un quadrilatère formé, sur la terre, par deux méridiens dont la différence de longitude $= p$, et par deux parallèles dont les latitudes sont o et L. J'appellerai de même Σ' l'aire de la projection de ce quadrilatère.

D'abord, en prenant toujours pour équation de l'ellipse génératrice du sphéroïde terrestre,

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2,$$

l'axe de rotation sera celui des y; ainsi la différentielle de l'aire Σ faisant partie de la zône entière engendrée par la révolution de l'arc σ

de l'ellipse autour du petit axe b, sera en général

$$d\Sigma = \frac{\pi}{200} px d\sigma :$$

or, x étant ici le rayon du parallèle à la latitude L, on a, n° 7,

$$x = \rho = \frac{a \cos L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}};$$

de plus

$$d\sigma = \frac{a(1 - e^2)\, dL}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{3}{2}}};$$

parconséquent

$$d\Sigma = \frac{\pi}{200} . pb^2 \frac{d . \sin L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^2}.$$

Fig. 12. D'un antre côté, il n'est pas difficile de voir que l'élément de l'aire $\Sigma' = BMM'B'$ peut être représenté, à un infiniment petit près du second ordre, par l'élément $BMmb$ correspondant du secteur circulaire BMC, dont s_1 est l'arc et R le rayon : or ce dernier élément est la différence des secteurs semblables BMC, bmC; d'ailleurs $BC = R$, $Bb = dR$; ainsi on a

$$bm = \frac{s_1 (R - dR)}{R};$$

par suite

$$\text{sect. } BMC = \frac{s_1 R}{2}, \quad \text{sect. } bmC = \frac{s_1 (R - dR)^2}{2R},$$

et

$$\text{sect. } BMC - \text{sect. } bmC = s_1 dR,$$

en négligeant les termes du second ordre; donc

$$d\Sigma' = s_1 dR.$$

Mais par ce qui précède,

$$s_1 = ap \frac{\pi}{200} \frac{\cos L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}, \quad \text{et} \quad dR = d\sigma;$$

donc

$$d\Sigma = d\Sigma',$$

et comme les deux membres de cette équation doivent être intégrés entre les mêmes limites, il s'ensuit que $\Sigma = \Sigma'$; ce qu'il fallait prouver.

Pour effectuer réellement cette intégration, soit Σ, ou

$$\frac{\pi}{200}b^2p\int\frac{d.\sin L}{(1-e^2\sin^2 L)^2}=\frac{\pi}{200}b^2p\left[\frac{A\sin L}{1-e^2\sin^2 L}+B\int\frac{\cos L.dL}{1-e^2\sin^2 L}\right].$$

A et B étant deux coefficiens constans qu'il s'agit de déterminer. Différenciant de part et d'autre, réduisant au même dénominateur, et comparant les termes homologues, on aura

$$A+B=1,\quad A-B=0,$$

d'où

$$A=\tfrac{1}{2},\quad B=\tfrac{1}{2};$$

parconséquent

$$\Sigma=\frac{\pi b^2p}{400}\left[\frac{\sin L}{1-e^2\sin^2 L}+\int\frac{dL.\cos L}{1-e^2\sin^2 L}\right].$$

L'intégrale du second terme de cette expression se présente sous forme finie, puisque $\int\frac{dL.\cos L}{1-e^2\sin^2 L}=\frac{1}{e}\log\left(\frac{1+e\sin L}{1-e\sin L}\right)^{\frac{1}{2}}$; ainsi

$$\Sigma=\frac{\pi b^2p}{400}\left[\frac{\sin L}{1-e^2\sin^2 L}+\frac{1}{e}\log\sqrt{\frac{1+e\sin L}{1-e\sin L}}\right]$$

sans constante, parce qu'elle est nulle lorsque $L=0$. Toutefois il est possible d'obtenir un développement en série qui procède suivant les multiples du sinus de L; car en vertu des transformations effectuées au n° 7,

$$\Sigma=\frac{\pi b^2p}{400}(1+n)\left[\frac{\sin L}{1+n\cos 2L}+\int\frac{dL.\cos L}{1+n\cos 2L}\right]:$$

or

$$\int\frac{dL\cos L}{1+n\cos 2L}=\int\frac{dL\cos L}{(1-n^2)^{\frac{1}{2}}}[1-2m\cos 2L+2m^2\cos 4L-2m^3\cos 6L+..];$$

et parcequ'en général $2\cos L\cos\mu L=\cos(\mu+1)L+\cos(\mu-1)L$, on a

$$\frac{1}{(1-n^2)^{\frac{1}{2}}}\int dL.\left[\cos L(1-m)-(m-m^2)\cos 3L+(m^2-m^3)\cos 5L -(m^3-m^4)\cos 7L+\ldots\right];$$

divisant et multipliant tout par $(1-m)$, on obtient, après l'intégration,

$$\frac{1-m}{(1-n^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\sin L - \tfrac{2}{3} m \sin 3L + \tfrac{1}{5} m^2 \sin 5L - \tfrac{1}{7} m^3 \sin 7L + \ldots\right],$$

puisque la constante est nulle.

D'ailleurs à cause de $2 \sin L \cos \mu L = \sin(\mu+1)L - \sin(\mu-1)L$, on a en outre,

$$\frac{\sin L}{1+n\cos L} = \frac{1+m}{(1-n^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\sin L - m \sin 3L + m^2 \sin 5L - m^3 \sin 7L + \ldots\right].$$

Substituant ces deux séries dans l'expression ci-dessus de Σ, et réduisant, on trouve définitivement, en faisant attention que $\frac{1+n}{(1-n^2)^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{1+n}{1-n}} = \frac{a}{b}$,

$$\Sigma = \frac{\pi a b p}{200}\left[\begin{array}{l}\sin L - \tfrac{1}{3} m(2+m)\sin 3L + \tfrac{1}{5} m^2(3+2m)\sin 5L \\ \qquad - \tfrac{1}{7} m^3 (4+3m)\sin 7L + \ldots\end{array}\right].$$

Si on introduisait dans ce résultat, pour m sa valeur $\frac{a-b}{a+b}$, on aurait précisément la série que j'ai donnée à la page 324 de ma *Topographie*.

Il suit de là qu'en désignant par L et L' les latitudes de deux parallèles, et par p, p' les longitudes de deux méridiens, l'aire $\Sigma_{(0)}$ du quadrilatère compris entre ces lignes sera, en faisant d'ailleurs $\frac{1}{2}(L-L') = \varphi$, $\frac{1}{2}(L+L') = \Phi$,

$$\Sigma_{(0)} = \pi a b\left(\frac{p-p'}{100}\right)\left[\begin{array}{l}\sin\varphi\cos\Phi - \tfrac{1}{3} m(2+m)\sin 3\varphi \cos 3\Phi \\ \quad + \tfrac{1}{5} m^2(3+2m)\sin 5\varphi \cos 5\Phi \\ \quad - \tfrac{1}{7} m^3(4+3m)\sin 7\varphi \cos 7\Phi \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right],$$

série dont le terme général est évidemment

$$\pm \pi a b\left(\frac{p-p'}{100}\right)\left[\frac{1}{2i-1} m^{i-1}\left[i + (i-1)m\right]\sin(2i-1)\varphi\cos(2i-1)\Phi\right],$$

le signe supérieur ayant lieu lorsque i, qui est le nombre des termes, est impair, et le signe supérieur devant être pris dans le cas contraire. On a par là le moyen de calculer l'aire de l'étendue d'un

pays dont on a construit la carte à l'aide des latitudes et des longitudes; mais il est possible de calculer tout simplement les aires des quadrilatères d'une carte, ainsi que les autres espaces qu'elle renferme, par les moyens qu'offre la Géométrie élémentaire, toutes les fois que l'on a fait usage du présent système de projection.

Ceux qui voudront rechercher diverses expressions du volume d'un segment de sphéroïde terrestre, compris sous des bases parallèles au plan de l'équateur, n'auront pas de peine à les trouver d'après ce qui précède. Par exemple, si o et L sont les latitudes de ces bases, le volume V de ce segment sera donné par la formule suivante :

$$V = \pi \int x^2 dy = \pi b^2 \gamma' \sin L \left(1 - \frac{1}{3} \frac{b^2}{a^2} \frac{\sin^2 L}{1 - e^2 \sin^2 L}\right)$$

$$= \pi b^2 \gamma' \sin L \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\gamma}{\gamma'} \sin^2 L\right),$$

ou par cette série régulière et simple,

$$V = \pi b^2 \gamma' \sin L \left[1 - \frac{1}{3} \frac{b^2}{a^2} \sin^2 L \,(1 + e^2 \sin^2 L + e^4 \sin^4 L + \ldots\right],$$

γ' et γ étant, comme au n° 9, les rayons de plus grande et de plus petite courbure de la surface du sphéroïde terrestre, au point dont la latitude est L.

19. M. le colonel Henry, en s'occupant de recherches analogues à celles qui font l'objet de ce chapitre, comme je l'ai déjà annoncé, a démontré, d'après M. Legendre, que lorsque la tangente à l'ellipse, comprise entre les prolongemens des demi-axes, est égale à leur somme, la différence des deux portions du quart d'ellipse, séparées par le point de contact, est précisément égale à celle des demi-axes; propriété très-remarquable en effet, mais qui est une conséquence très-naturelle d'un théorème que l'on doit à Euler, et par lequel on peut obtenir indéfiniment deux arcs d'ellipse dont la différence soit exactement rectifiable. Comme cette propriété entraîne avec elle des simplifications dans les formules relatives à la projection actuelle, considérée dans un de ses cas particuliers, je vais traiter le problème dont il s'agit avec toute l'étendue convenable.

Prenant encore pour équation de l'ellipse celle qui est rapportée au centre, l'équation différentielle d'un arc de cette courbe est

$$dS = \frac{-dx\sqrt{a^2 - e^2x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-dx\sqrt{a^2 - \frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

je prends le signe *moins*, parceque S commence à l'équateur. Si on fait $a^2 - e^2x^2 = z^2$, z étant une variable, on aura

$$x = a\sqrt{\frac{a^2 - z^2}{a^2 - b^2}},$$

et par suite,

$$dS = \frac{z^2dz}{\sqrt{(a^2 - z^2)(z^2 - b^2)}}.$$

Pour un autre arc S' commençant de même à l'équateur, et finissant à l'ordonnée qui répond à l'abscisse x', on aura pareillement

$$dS' = \frac{-dx'\sqrt{a^2 - e^2x'^2}}{\sqrt{a^2 - x'^2}};$$

et si l'on fait $a^2 - e^2x'^2 = \frac{a^2b^2}{z^2}$, il s'ensuivra que

$$x' = \frac{a^2\sqrt{z^2 - b^2}}{z\sqrt{a^2 - b^2}};$$

partant

$$dS' = \frac{-a^2b^2dz}{z^2\sqrt{(a^2 - z^2)(z^2 - b^2)}}.$$

Maintenant différenciant la fonction $-\frac{\sqrt{(a^2-z^2)(z^2-b^2)}}{z}$, en regardant z comme variable, on aura

$$-d.\frac{\sqrt{(a^2-z^2)(z^2-b^2)}}{z} = \frac{z^2dz}{\sqrt{(a^2-z^2)(z^2-b^2)}} - \frac{a^2b^2dz}{z^2\sqrt{(a^2-z^2)(z^2-b^2)}},$$

et intégrant, il viendra visiblement

$$-\frac{\sqrt{(a^2-z^2)(z^2-b^2)}}{z} = S + S' + \text{const.}$$

Dans la vue de déterminer la constante, supposons que S égale le quart de la circonférence de l'ellipse, c'est-à-dire, soit $S = Q$; alors $x = 0$, $z = a$, et $\sqrt{(a^2 - z^2)(z^2 - b^2)} = 0$. Dans la même circonstance $x' = a$, et $S' = 0$; l'on a donc

$$\text{const.} = -Q,$$

et parconséquent

$$(Q - S') - S = \frac{\sqrt{(a^2 - z^2)(z^2 - b^2)}}{z};$$

mais $Q - S' = S''$ est un arc d'ellipse commençant au pôle; donc

$$S'' - S = \frac{\sqrt{(a^2 - z^2)(z^2 - b^2)}}{z}.$$

Il suit de là que la différence des deux arcs S, S'' est une quantité algébrique dont la valeur dépendra de celle qu'on pourra attribuer à z. Si l'on cherche, par la règle connue, le *maximum* de cette différence, on trouvera qu'il a lieu lorsque $z = \sqrt{ab}$; dans ce cas

$$S'' - S = a - b,$$

et

$$x = \frac{a\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}} = x':$$

or par le n° 7, $x = \frac{a \cos L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}$; ainsi dans l'hypothèse présente,

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}} = \frac{\cos L}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}}.$$

Elevant tout au quarré, l'on a

$$\frac{a}{a+b} = \frac{1}{1 + (1 - e^2)\tang^2 L},$$

par suite,

$$\tang^2 L = \frac{b}{a(1 - e^2)} = \frac{a}{b}.$$

De cette valeur et de celles (4), (3) et (1) du numéro précité, il résulte nécessairement que

$$t_{(1)} = a, \quad \mathcal{E}_{(1)} = b, \quad \mathfrak{N}^2_{(1)} = \frac{a^2}{b};$$

en désignant par $t_{(0)}$, $\mathfrak{C}_{(0)}$, $\mathfrak{T}_{(0)}$ ce que deviennent t, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{T}$ lorsque $\tang^2\lambda$ se change en $\tang^2 L = \frac{a}{b}$. D'après cette notation, et à cause de $\sin L = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a+b}}$, on a

$$\theta_{(0)} = \frac{a}{R_{(0)}} p \sqrt{\frac{a}{a+b}}, \quad \text{et} \quad \tang u_{(0)} = p \sqrt{\frac{a}{a+b}} \cdot \left[1 - \frac{a}{R_{(0)}}\right];$$

donc si on prenait $R_{(0)} = a$ pour le rayon du moyen parallèle de la carte, on aurait $R_{(0)} = t_{(0)}$, et par rapport à tous les points de ce parallèle,

$$\theta_{(0)} = p \sqrt{\frac{a}{a+b}}, \quad \tang u_{(0)} = 0,$$

$$X = a \cos . \left(\frac{334}{667}\right)^{\frac{1}{2}} p, \quad Y = a \sin . \left(\frac{334}{667}\right)^{\frac{1}{2}} p,$$

ce qui est de toute évidence.

Voilà ce qui constitue la théorie de la projection modifiée de Flamstéed, ou de la *projection conique altérée*, dont je n'avais donné qu'un léger aperçu dans ma *Topographie*. Il convient maintenant d'en faire des applications, et c'est l'objet que je me suis proposé dans le chapitre suivant.

CHAPITRE III.

Solutions numériques de divers problèmes relatifs à la projection précédente.

20. LA *latitude et la longitude d'un point étant données, trouver les coordonnées de ce point, prises à partir du centre du développement de la carte, supposé à 50° de latitude.*

Il est évident que c'est de la solution de ce problème que dépend la construction du canevas d'une carte ; ainsi, par exemple, pour déterminer les points d'un même parallèle ou d'un même méridien, il faudra supposer la latitude constante et la latitude variable, ou réciproquement ; mais il s'agira ici de la projection d'un point quelconque.

Soit $L=54^{\circ},2530$ la latitude du point M, situé dans la région nord-est, et $p=8^{\circ},7105$ la différence des longitudes de ce point et du centre A du développement ; trouver l'abcisse $AP=x$, et l'ordonnée $PM=y$. Fig. 4.

Première solution. Suivant les n°s 10 et 11, on a

$$\sigma = 100000^{m}\varphi + 28633^{m},49 \sin^2\varphi - 13^{m},41 \sin 4\varphi - 0^{m},031 \sin^2 3\varphi$$
$$R = 6385290^{m} - \sigma = t - \sigma.$$

$$\log \mathcal{N} = 6,80518114 - 0,000651116 \cos 2L + 0,0000004881 \cos 4L.$$

$$\theta = p \cos L \left(\frac{\mathcal{N}}{R}\right);$$

$$x = t - R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta,$$
$$= \sigma + y \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\theta,$$

et en vertu de l'énoncé du problème,

$$L = 54^{\circ},2530, \quad \varphi = 54^{\circ},2530 - 50^{\circ} = 4^{\circ},2530; \quad p = 8^{\circ},7105,$$

Calcul de σ.

2e terme.		*3e terme.*	
log constant	= 4,4568744 +	log constant	= 1,1274288 —
log sin φ	= 8,8244922	log sin 4φ	= 9,4216941
idem	= 8,8244922	log 3e terme	= 0,5491229 —
log 2e terme	2,1058588 +	3e terme	— 3",54

2e terme = + 127",60
3e terme = — 3, 54
Somme.... + 124, 06
1er terme
ou 100000φ = 425300, 00
σ = 425424, 06,

de là $R = t - \sigma = 5959866"$,
et $\log R = 6{,}7752365$.

Calcul de log Tb.

2e terme.		*3e terme.*	
log const	= 6,81366 —	log const	= 3,68851 +
log cos 2L	= 9,12455 —	log cos 4L	= 9,98430 —
	5,93821 +		3,67281 —
2e terme	+ 0,00008674	3e terme	— 0,000000471

3e terme — 0,00000047
somme + 0,00008627
1er terme 6,80518114
log Tb = 6,8052674.

Calcul de l'angle θ.

log Tb = 6,8052674
log cos L = 9,8184408
comp log R = 3,2247635
log $p_{,}$ = 0,9400431
log θ = 0,7885148
θ = 6°,14′49″.

Calcul des coordonnées x *et* y.

Valeur de y.

$$\log R = 6{,}7752365$$
$$\log \sin \theta = 8{,}9839601$$
$$\log y = 5{,}7591966$$
$$y = 574376^{m}{,}4$$

1er *valeur de* x.

$$\log y = 5{,}7591966$$
$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}\theta = 8{,}6839421$$
$$4{,}4431387$$
$$y\ \text{tang}\ \tfrac{1}{2}\theta = 27742^{m}{,}1$$
$$+\sigma = 425424{,}1$$
$$x = 453166{,}2.$$

2e *valeur de* x.

$$\log R = 6{,}7752365$$
$$\log \cos \theta = 9{,}9979738$$
$$\log X = 6{,}7732103 \qquad t = 6385290^{m}$$
$$X = 5932124 \ldots\ldots - 5932124$$
$$x = 453166, \text{ comme par le 1}^{er} \text{ calcul.}$$

Les deux coordonnées du point M, à partir du centre du développement, sont donc, à l'échelle de 1^{m} pour 1^{m},

$$x = 453166^{m}, \quad y = 574376^{m}.$$

Si la latitude de ce point était plus petite que celle du parallèle moyen, il faudrait prendre $x = \sigma - y \text{ tang } \frac{1}{2}\theta$, et pour valeur de σ celle qui est donnée par la dernière équation de la page 32. Alors selon que x sera positive ou négative, sa valeur se portera au-dessous ou au-dessus de l'axe AY, comme cela est évident.

La formule qui donne la première valeur de x, doit, surtout, être employée lorsque l'angle θ est très-petit, afin de se prémunir contre l'erreur des Tables de logarithmes.

Deuxième solution. On calculerait beaucoup plus rapidement les coordonnées x, y à l'aide de Tables auxiliaires qui donneraient θ et σ. C'est dans cette vue que j'ai mis à la fin de ce Supplément une Table des amplitudes des arcs de parallèle sur la présente projection, pour 1° de longitude; ces amplitudes répondent à l'équation

$\theta = p \cos L \left(\frac{\mathcal{T}}{R}\right)$, dans laquelle $p = 1^c$; et au moyen des différences premières et secondes qui se trouvent dans cette Table I, l'on pourra obtenir les valeurs de θ pour tous les parallèles menés de décigrades en décigrades, depuis la latitude de 30^c jusqu'à celle de 70^c. Voyez pour cela l'explication qui précède la Table.

Quant à la valeur de l'arc σ, elle sera donnée par la seconde partie de la Table III du *Traité de Topographie*. En effet, puisque dans l'exemple ci-dessus, $\varphi = 4^c,253$, il faudra prendre dans cette Table les quatre nombres qui sont vis-à-vis les latitudes 50, 51, 52, 53^c, et le nombre suivant $100062^m,4$ multiplié par $0^c,253$; la somme sera 425425^m : c'est à $\frac{2}{10}$ d'unité près la valeur de σ obtenue ci-dessus. Cette différence, qui n'est d'aucune importance, vient, d'une part, de ce que les nombres de la Table ont été calculés pour l'aplatissement $\frac{1}{335}$, tandis que j'ai introduit dans toutes mes formules l'aplatissement $\frac{1}{334}$; et d'autre part, de la supposition que j'ai faite, que les parties d'un grade de méridien ayant même amplitude, sont égales, ce qui n'est pas rigoureusement vrai.

Il faut pourtant avouer que l'usage de la Table qui donne l'angle θ n'est réellement commode que pour calculer les coordonnées x, y des points des quadrilatères de la carte : voici, dans tout autre cas, la manière d'abréger les calculs de la première solution.

On cherchera, comme on vient de le dire, la valeur de σ au moyen de la Table précitée, et ensuite la valeur de log $\mathcal{T}$ à l'aide de la Table IX du *Traité de Géodésie ;* car à cause de

$$\mathcal{T} = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2 L)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{2\pi}{400} \cdot \frac{400}{2\pi},$$

on a

$$\log \mathcal{T} = \log (\textit{facteur de la Table}) + \log \frac{400}{2\pi} :$$

donc au logarithme du facteur fourni par cette Table, on ajoutera le logarithme constant 1,8038801, et la somme sera le log de $\mathcal{T}$. Dans l'exemple ci-dessus, on a $L = 54^c,25$, ainsi la Table

donne

log facteur...... 5,0013830,
ajoutant log const 1,8038801,

on a log 𝔑 = 6,8052631,

logarithme qui est, de 43 unités du dernier ordre, plus petit que celui que j'ai trouvé plus haut. Cette différence a bien peu d'influence sur les résultats que l'on cherche en ce moment; cependant on pourrait augmenter d'environ 0,0000040 tous les logarithmes de la Table IX, afin d'établir plus d'accord entre eux et la formule employée dans la première solution; ou bien porter le logarithme constant dont il s'agit ci-dessus, à 1,8038841. Voyez la Table II de ce Supplément qui présente le modèle de tous les calculs d'un point quelconque de la projection.

21. *Trouver dans quelle feuille d'une carte doit être projeté un point dont on connaît la latitude et la longitude.*

Supposons que cette carte soit au $\frac{1}{50000}$, c'est-à-dire qu'une longueur prise sur le terrain, y soit représentée par sa 50000ième partie; supposons en outre qu'il s'agisse d'y projeter le point M déterminé par le problème précédent. D'après ce qui a été dit au n° 11, pour transporter l'origine des coordonnées à l'angle de la feuille le plus voisin du centre de développement, il faudra d'abord multiplier les valeurs ci-dessus de x et y par le rapport $\frac{1}{50000}$, et l'on aura Fig. 5.

$$\frac{x}{50000} = 9^{m},06332, \quad \frac{y}{50000} = 11^{m},48752,$$

pour les longueurs absolues de ces lignes : or cherchant combien $9^{m},06332$ contient de fois $0^{m},5$, et combien $11^{m},48752$ contient de fois $0^{m},8$, et ne tenant compte d'ailleurs que des parties entières μ et μ' des quotiens (n° cité), on aura

$$\mu = 18, \quad \mu' = 14.$$

Ainsi les coordonnées de la nouvelle origine seront, en valeurs

absolues,

$$x_{(0)} = 0^m,5 \times 18 = 9^m,0 \quad \text{et} \quad y_{(0)} = 0^m,8 \times 14 = 11^m,2;$$

ou en parties de l'échelle de la carte,

$$x_{(0)} = 450000^m, \quad y_{(0)} = 560000^m;$$

le point M se trouve donc dans la feuille numérotée ainsi que le représente la figure 5, puisqu'en général le numéro de la hauteur de la feuille est $\mu + 1$, celui de la longueur, $\mu' + 1$ (n° 11), et que les coordonnées $x_{(0)}$, $y_{(0)}$ sont positives.

Quant aux coordonnées x' et y' rapportées à l'angle de cette feuille, elles sont en parties du mètre réel,

$$x' = x - x_{(0)} = 9^m,06332 - 9^m = 0^m,06332$$
$$y' = x - y_{(0)} = 11^m,48752 - 11^m,2 = 0^m,28752,$$

ou en parties de l'échelle de la carte,

$$x' = 3166^m,$$
$$y' = 14376^m.$$

Il suit de là que l'on pourra très-facilement projeter le point M sur la feuille en question, à l'aide des valeurs de ces dernières coordonnées, soit avec une mesure divisée en demi-millimètres, soit avec l'échelle même de la carte.

Si ce même point devait être placé sur une bande de la carte, et que le rapport de l'échelle de la feuille à celle du levé fût celui de 1 : 10, il faudrait évidemment multiplier les valeurs absolues ci-dessus de x' et y' par 10, afin qu'elles fussent les coordonnées absolues du point M relativement à ces bandes ; et comme je suppose que sur ces mêmes bandes l'on ait tracé les lignes de raccordement des feuilles, le problème d'y projeter les points trigonométriques du canevas se résoudra avec la même facilité que sur la réduction même des levés. Cependant lorsque les méridiens et les parallèles seront tracés de décigrades en décigrades, et que l'on aura calculé les latitudes et les longitudes des sommets des triangles du premier ordre, on pourra tout simplement projeter ces points

sur les feuilles ou sur les bandes, ainsi que je l'ai enseigné au n° 12; et ensuite projeter les triangles secondaires par la méthode du n° 17, méthode qui peut d'ailleurs se simplifier beaucoup, puisque l'on a évidemment $NN' = nn'$, $MM' = mm'$ et $PP' = pp'$. Fig. 9 et 10.

22. *Déterminer les angles des quadrilatères formés sur la carte par des méridiens et des parallèles.*

Suivant la théorie exposée au n° 15, l'angle d'un quadrilatère, dont l'ouverture est dirigée vers l'axe des x ou le méridien moyen, et vers le nord, a pour expression $100^{G} - u$, et l'on a

$$\text{tang}\, u = \frac{\pi}{200}(p \sin L - \theta) = \frac{\pi p \sin L}{200} - \frac{\pi \theta}{200}.$$

Pour appliquer cette formule à un exemple, admettons les mêmes données que ci-dessus; c'est-à-dire, supposons que le sommet de l'angle dont il s'agit, ait respectivement pour latitude et pour longitude,

$$L = 54^{G},2530, \quad \text{et} \quad p = 8^{G},7105;$$

on aura alors

$$\theta = 6^{G},1449,$$

et en procédant par logarithmes, on trouvera

Premier terme.	*Deuxième terme.*
log π = 0,4971499	
comp. log 200 = 7,6989700	
somme...... 8,1961199	.... 8,1961199 —
log p = 0,9400431	log θ = 0,7885148
log sin L = 9,8766411	log 2° terme = 8,9846347 —
log 1er terme = 9,0128041	2° terme — 0,0965239
1er terme + 0,1029922	.... 1er terme + 0,1029922
	tang u = 0,0064683
	log tang u = 7,8107902
	u = 0°,41'17"8.

Ainsi l'angle cherché $= 100^{G} - 0^{G},41178 = 99^{G},58822$.

J'ai fait connaître au n° 16, de quel usage pouvait être la solution

numérique de ce problème, et j'ai même indiqué un moyen très-simple, et toujours suffisamment exact dans la pratique, d'éviter tout calcul à cet égard.

Je terminerai ce numéro en observant qu'en plaçant le centre du développement sur l'équateur même, c'est-à-dire en faisant $\lambda = 0$, tous les parallèles deviennent des lignes droites perpendiculaires au méridien moyen (n° 14); de sorte que les formules qui se rapportent à ce cas, sont

$$t = \infty, \quad R = \infty, \quad \theta = 0, \quad \text{tang}\, u = p \sin L,$$

$$\sigma = \frac{b^2}{a}(1+n)^{\frac{3}{2}}\left\{qL - \frac{q'}{2}\sin 2L + \frac{q''}{4}\sin 4L - \frac{q'''}{6}\sin 6L + \ldots\right\},$$

ou

$$\sigma = \frac{Q}{\frac{1}{2}\pi}\left[L - \frac{q'}{2q}\sin 2L + \frac{q''}{4q}\sin 4L - \frac{q'''}{6q}\sin 6L + \ldots\right],$$

$$x = \sigma, \quad y = s_1 = \frac{p}{200}\cdot\frac{a\pi(1+n)^{\frac{1}{2}}\cos L}{(1+n\cos 2L)^{\frac{1}{2}}};$$

elles dérivent immédiatement des formules générales du n° 11. La première valeur de σ peut aussi s'obtenir de suite, en changeant λ en L, dans celle de S donnée page 27.

25. Il serait possible d'étendre davantage cette série de questions, mais celles qui précèdent sont vraiment les seules importantes; et, comme je l'ai déjà dit, quand on possédera les grandes Tables citées au n° 11, le tracé de la projection actuelle se fera sans le secours d'aucune formule. Au surplus, les Ingénieurs-géographes chargés de la confection des cartes faisant partie de celle de l'Empire Français, ou qui s'y rattachent, peuvent, en attendant la publication de ces Tables, s'éviter la peine de calculer les coordonnées des points de la projection, puisque le Dépôt général de la Guerre se trouve, dès à présent, dans la possibilité de leur en fournir les valeurs. Quant à ceux qui s'occupent seulement de la Géographie, ils trouveront dans le Traité auquel ce Supplément se rapporte, tous les détails convenables pour construire aisément les cartes propres à leur usage, d'après le mode de projection qu'il leur plaira d'adopter.

CHAPITRE

CHAPITRE IV.

Formules pour déterminer les positions géographiques des sommets des Triangles du premier ordre.

24. J'AI supposé, dans ce qui précède, qu'avant de projeter sur une carte les sommets des triangles du premier ordre, l'on avait déterminé leurs positions géographiques, c'est-à-dire leurs latitudes et leurs longitudes : or, les deux ouvrages auxquels ce Supplément se rapporte, offrent diverses méthodes de calcul plus ou moins rigoureuses à ce sujet. Quoique le présent chapitre qui forme le complément de ces méthodes, n'ait pas un rapport très-direct avec la théorie que je viens d'exposer, je n'hésite pas à publier les démonstrations de quelques-unes des formules que M. Legendre a données sur les triangles sphéroïdiques, et que j'ai seulement transcrites à la fin de mon *Traité de Topographie*.

Soit P le pôle de la terre, s l'arc MM' de plus courte distance, λ, λ' les latitudes vraies des points M, M'; ψ, ψ' les latitudes réduites de ces mêmes points, l la latitude vraie du point A où le méridien PA est perpendiculaire à la ligne géodésique MM', et l' sa latitude réduite; V, V' les angles azimutaux PMA, $PM'A$; enfin φ et φ' les longitudes des points M, M', comptées du méridien PA. Il s'agit de trouver des relations entre ces diverses quantités, dans l'hypothèse que la terre est un ellipsoïde de révolution, et que la ligne géodésique s est très-petite par rapport aux arcs PM, PM'. Fig. 13.

Afin de donner plus de suite à la présente théorie, je reprendrai les démonstrations des formules fondamentales rapportées au n° 7 du *Traité de Topographie*, mais je les simplifierai à quelques égards.

Si $u = 0$ est l'équation d'une surface courbe quelconque, l'une

de celles de la ligne la plus courte sur cette surface sera

$$\left(\frac{du}{dx}\right) ddy - \left(\frac{du}{dy}\right) ddx = 0 \ldots\ldots.(1).$$

Or l'équation d'un solide de révolution, quelle que soit d'ailleurs la nature de la courbe génératrice, est

$$x^2 + y^2 + f(z) = u = 0,$$

f étant le signe d'une fonction quelconque, et l'axe des z étant celui de rotation; ainsi les valeurs des coefficiens aux différentielles partielles sont

$$\left(\frac{du}{dx}\right) = 2x, \quad \left(\frac{du}{dy}\right) = 2y;$$

l'équation (1) devient donc

$$xddy - yddx = 0,$$

et en intégrant, l'on a

$$xdy - ydx = cds.$$

D'ailleurs si l'on fait CT ou $z = t$, $TM' = q$, le triangle rectangle Cpm, dans lequel $Cp = x$, $pm = y$ et $Cm = q$, donnera évidemment

$$x = q \cos \varphi', \quad y = q \sin \varphi';$$

parconséquent en différenciant, l'on obtiendra

$$\left.\begin{array}{l} dx = dq \cos \varphi' - q \sin \varphi' d\varphi' \\ dy = dq \sin \varphi' + q \cos \varphi' d\varphi' \end{array}\right\} \ldots\ldots(2),$$

et l'on aura, par une combinaison de ces quatre équations,

$$xdy - ydx = q^2 d\varphi'.$$

Concluons de là que

$$q^2 d\varphi' = cds.$$

D'un autre côté, le triangle élémentaire $a'm'M'$, rectangle en m', donne

$$\sin PM'A \quad \text{ou} \quad \sin V'' = \frac{a'm'}{ds},$$

et les deux arcs semblables $F'G' = d\varphi'$ et $a'm'$ étant proportionnels à leurs rayons respectifs CF' et $q-dq$, l'on a

$$a'm' = qd\varphi',$$

en prenant toutefois $CF' = 1$, et négligeant le terme du second ordre $-dqd\varphi'$; donc

$$\sin V' = \frac{qd\varphi'}{ds}, \quad \text{et} \quad q \sin V' = c;$$

ainsi la propriété de la ligne la plus courte est de rendre $q \sin V'$, constant.

Observons en outre que l'on peut prendre pour méridien fixe, ou pour plan des xz, celui qui est perpendiculaire à la ligne géodésique $MM' = s$. Soit donc PA ce méridien ; alors au point A, l'azimuth $V' = 100^c$, et la constante c est égale à AI, valeur initiale de q.

De plus, l'équation différentielle d'un arc MM' étant

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

elle devient, à cause des valeurs ci-dessus de dx et dy, et faisant attention que $z = t$,

$$ds^2 = dq^2 + q^2 d\varphi'^2 + dt^2.$$

Substituant ici pour ds sa valeur $\frac{q^2 d\varphi'}{c}$, ensuite éliminant $d\varphi'$, on a

$$\left.\begin{array}{l} q^2(q^2 - c^2)\, d\varphi'^2 = c^2(dt^2 + dq^2) \\ (q^2 - c^2)\, ds^2 = q^2(dt^2 + dq^2) \end{array}\right\} \ldots\ldots (3).$$

Avant d'intégrer ces équations, il faut en éliminer l'une des variables t, q à l'aide de l'équation du méridien mobile $PM'F$, qui est

$$a^2t^2 + b^2q^2 = a^2b^2.$$

Mais pour parvenir aux résultats les plus simples, introduisons une nouvelle variable ψ', telle que l'on ait

$$t = b \sin \psi',$$

auquel cas ψ' sera l'angle que forme avec l'équateur, le rayon b du cercle inscrit au méridien mobile PM', et dont la variable t est l'abscisse d'un de ses points. Cette valeur étant introduite dans l'équation de ce méridien, on a

$$q = a \cos \psi'.$$

Il résulte de là que la constante c, qui a pour valeur $q \sin V'$, devient

$$c = a \sin V' \cos \psi'.$$

A un autre point M de la plus courte distance, pour lequel ψ' se change en ψ, et V' en V, on aurait de même

$$c = a \sin V \cos \psi;$$

enfin au point A où l'azimuth de AM' est supposé de 100^c, on aurait, en désignant par l' ce que devient ψ',

$$c = a \cos l';$$

donc il résulte de ces trois valeurs, la relation

$$\cos l' = \sin V \cos \psi = \sin V' \cos \psi' \ldots\ldots (4).$$

Maintenant si l'on substitue dans les formules (3), pour t, q et c leurs valeurs respectives $b \sin \psi'$, $a \cos \psi'$ et $a \cos l'$, on aura, parce que φ' augmente quand ψ' diminue,

$$\left.\begin{aligned} d\varphi' &= -\frac{\cos l' . d\psi'}{a \cos \psi'} \sqrt{\frac{(a^2 \sin^2 \psi' + b^2 \cos^2 \psi')}{(\cos^2 \psi' - \cos^2 l')}} \\ ds &= -d\lambda' \cos \psi' \sqrt{\frac{(a^2 \sin^2 \psi' + b^2 \cos^2 \psi')}{(\cos^2 \psi' - \cos^2 l')}} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (b').$$

Il est remarquable que la variable ψ' se déduit immédiatement de la latitude λ' du point M'; car à cause de $TM' = a \cos \psi'$ et de $CT = b \sin \psi'$, on a, pour la sounormale TO de ce point,

$$TO = \frac{a^2}{b^2} . b \sin \psi' = \frac{a^2}{b} . \sin \psi',$$

et de là

$$\frac{TO}{TM'} \text{ ou } \tang \lambda' = \frac{a}{b} \tang \psi';$$

donc réciproquement

$$\tang \psi' = \frac{b}{a} \tang \lambda'.$$

M. Legendre appelle ψ' la *latitude réduite* du point M', parceque sur le sphéroïde aplati, elle est en général moindre que la latitude vraie λ'. Mais l'on sait (n° 34, *Géodésie*) qu'il est commode et exact dans la pratique, d'évaluer $\lambda' - \psi'$ à l'aide de la série

$$\lambda' - \psi' = \left(\frac{a-b}{a+b}\right) \sin 2\lambda' - \frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 \sin 4\lambda' + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3 \sin 6\lambda' - \ldots,$$

ou de celle-ci

$$\lambda' - \psi' = \left(\frac{a-b}{a+b}\right) \sin 2\psi' + \frac{1}{2}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 \sin 4\psi' + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^3 \sin 6\psi' + \ldots,$$

selon que λ' ou ψ' est connue.

Il est évident que l'on aura aussi entre l et l' la relation

$$\tang l' = \frac{b}{a} \tang l,$$

puisque, d'après la définition ci-dessus, l' est la latitude réduite du point A dont la latitude vraie est l.

25. Considérons maintenant deux triangles sphériques pma, $pm'a$, correspondant aux triangles sphériques PMA, $PM'A$; et supposons que les azimuths V, V' soient les mêmes de part et d'autre, mais que les latitudes des points a, m, m' soient l', ψ et ψ'; enfin représentons respectivement par μ et ξ les arcs am et mm'. Cela posé, on aura, par la propriété des triangles sphériques rectangles, les relations suivantes: Fig. 14 et 13.

$$\left.\begin{aligned} \sin \psi' &= \sin l' \cos(\mu + \xi) \\ \sin \psi &= \sin l' \cos \mu \\ \sin l' \sin \mu &= \cos V \cos \psi \end{aligned}\right\} \ldots\ldots(5).$$

En effet, les deux premières résultent de ce que, dans un tel triangle, le cosinus de l'hypoténuse est égal au produit des

cosinus des deux autres côtés; et la troisième s'obtient ainsi qu'il suit :

De l'équation (4), qui est $\cos l' = \sin V \cos \psi$, l'on tire

$$\sin^2 l' = 1 - \sin^2 V \cos^2 \psi,$$

et la seconde relation ci-dessus donnant $\cos \mu = \frac{\sin \psi}{\sin l'}$, il vient

$$\sin \mu = \frac{\sqrt{(\sin^2 l' - \sin^2 \psi)}}{\sin l'};$$

introduisant ici la valeur de $\sin^2 l'$, on trouve

$$\sin \mu = \frac{\cos V \cos \psi}{\sin l'};$$

donc

$$\sin l' \sin \mu = \cos V \cos \psi.$$

Ces diverses relations sont d'un merveilleux secours pour la solution du problème proposé. D'abord si dans les équations (b'), qui font voir que ψ' est compris entre $+ l'$ et $- l'$, on fait, par cette raison,

$$\sin \psi' = \sin l' \cos x,$$

d'où il suit que $x = \mu + \xi$, elles deviendront par la substitution de cette valeur, et en faisant de plus $a^2 = b^2(1 + \epsilon)$,

$$\left.\begin{array}{l} d\varphi' = \dfrac{b \cos l' . dx \sqrt{1 + \epsilon \sin^2 l' \cos^2 x}}{a(1 - \sin^2 l' \cos^2 x)} \\ ds = b dx \sqrt{1 + \epsilon \sin^2 l' \cos^2 x} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (c');$$

mais puisque $x = \mu + \xi$, on a, en regardant μ comme constant,

$$dx = d\xi;$$

de plus, si l'on fait $\frac{s}{b} = \sigma$, on aura

$$\frac{ds}{b} = d\sigma,$$

et σ pourra être considérée comme une quantité très-petite du même ordre que ϵ; partant

$$d\sigma = d\xi \sqrt{1 + \epsilon \sin^2 l' \cos^2(\mu + \xi)}.$$

Or pour n'admettre dans la valeur de σ que des termes du troisième ordre, il suffira de prendre

$$\begin{aligned}\cos(\mu+\xi) &= \cos\mu - \xi\sin\mu\\ \cos^2(\mu+\xi) &= \cos^2\mu - 2\xi\sin\mu\cos\mu\\ \cos^4(\mu+\xi) &= \cos^4\mu\,;\end{aligned}$$

et comme le développement de l'équation précédente est

$$d\sigma = d\xi\left[1+\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin^2 l'\cos^2(\mu+\xi)-\tfrac{1}{8}\varepsilon^2\sin^4 l'\cos^4(\mu+\xi)\right],$$

on a, en intégrant entre les limites m et m', et remarquant que la constante est nulle, vu que σ et ξ s'évanouissent en même tems,

$$\sigma = \xi\left(1+\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin^2 l'\cos^2\mu-\tfrac{1}{8}\varepsilon^2\sin^4 l'\cos^4\mu\right)-\tfrac{1}{2}\xi^2(\varepsilon\sin^2 l'\cos\mu\sin\mu)\,;$$

ensuite si l'on a égard aux deux dernières relations (5), il vient

$$\sigma = \xi\left(1+\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin^2\psi-\tfrac{1}{8}\varepsilon^2\sin^4\psi\right)-\tfrac{1}{2}\xi^2\varepsilon\cos V\sin\psi\cos\psi\,;$$

et réciproquement, par le retour des séries,

$$\xi = \sigma\left(1-\tfrac{1}{2}\varepsilon\sin^2\psi+\tfrac{3}{8}\varepsilon^2\sin^4\psi\right)+\tfrac{1}{2}\sigma^2\varepsilon\cos V\sin\psi\cos\psi\ldots(i''),$$

d'où

$$\xi^2 = \sigma^2(1-\varepsilon\sin^2\psi),\quad \xi^3=\sigma^3.$$

Actuellement, il s'agit d'obtenir le développement de la latitude ψ' en fonction de ψ et des puissances de l'arc ξ, sur une sphère dont le rayon est b : or, à cet égard, le théorème de Taylor donne

$$\psi' = \psi + \left(\frac{d\psi'}{d\xi}\right)\xi + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\psi'}{d\xi^2}\right)\xi^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3\psi'}{d\xi^3}\right)\xi^3 + \ldots\ldots$$

et le triangle sphérique pmm' offrant les relations suivantes,

$$\left.\begin{aligned}\cot\tfrac{1}{2}(\psi+\psi') &= \frac{\sin\frac{1}{2}(V+V')}{\sin\frac{1}{2}(V-V')}\tan\tfrac{1}{2}\xi\\ \sin V\sin\xi &= \cos\psi'\sin(\omega'-\omega)\\ \sin\psi &= \cos\xi\sin\psi'+\sin\xi\cos\psi'\cos V'\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(6),$$

il sera facile d'en déduire les valeurs des coefficiens différentiels des

différens ordres, rapportées au point où $\xi = 0$; (*Voyez* d'ailleurs le n° 5 de la *Topographie*). Tous calculs faits, l'on trouve, relativement à la sphère, en se bornant aux termes de l'ordre ξ^3,

$$\psi' = \psi - \xi \cos V - \tfrac{1}{2}\xi^2 \sin^2 V \operatorname{tang} \psi + \tfrac{1}{3}\xi^3 \sin^2 V \cos V (\tfrac{1}{2} + \operatorname{tang}^2 \psi);$$

et mettant dans cette équation, pour ξ sa valeur précédente, l'on a, à l'égard du sphéroïde,

$$\begin{aligned} \psi' = \psi &- \sigma \cos V (1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin^2 \psi + \tfrac{3}{8}\varepsilon^2 \sin^4 \psi) \\ &- \tfrac{1}{2}\sigma^2 \sin^2 V \operatorname{tang} \psi (1 - \varepsilon \sin^2 \psi) \\ &- \tfrac{1}{2}\varepsilon\sigma^2 \cos^2 V \sin \psi \cos \psi \\ &+ \tfrac{1}{2}\sigma^3 \sin^2 V \cos V (\tfrac{1}{3} + \operatorname{tang}^2 \psi) \ldots\ldots (l'). \end{aligned}$$

L'azimuth V' se détermine avec la même facilité; car suivant la notation actuelle, et à cause de

$$V' = V + \left(\frac{dV'}{d\xi}\right)\xi + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2V'}{d\xi^2}\right)\xi^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3V'}{d\xi^3}\right)\xi^3 + \ldots,$$

et des relations (6), on obtient d'abord

$$\begin{aligned} V' = V &- \xi \sin V \operatorname{tang} \psi \\ &+ \xi^2 \sin V \cos V (\tfrac{1}{2} + \operatorname{tang}^2 \psi) \\ &- \xi^3 \sin V \cos^2 V \operatorname{tang} \psi (1 + \tfrac{4}{3} \operatorname{tang}^2 \psi) \\ &+ \xi^3 \sin V \operatorname{tang} \psi (\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3} \operatorname{tang}^2 \psi); \end{aligned}$$

puis éliminant ξ, on a, après quelques transformations faciles à effectuer,

$$\begin{aligned} V' = V &- \sigma \sin V \operatorname{tang} \psi (1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon \sin^2 \psi + \tfrac{3}{8}\varepsilon^2 \sin^4 \psi) \\ &+ \sigma^2 \sin V \cos V (\tfrac{1}{2} + \operatorname{tang}^2 \psi - \varepsilon \operatorname{tang}^2 \psi) \\ &+ \sigma^3 \sin^3 V \operatorname{tang} \psi (\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3} \operatorname{tang}^2 \psi) \\ &- \sigma^3 \sin V \cos^2 V \operatorname{tang} \psi (\tfrac{5}{6} + \operatorname{tang}^2 \psi) \ldots\ldots\ldots (m'). \end{aligned}$$

Quant à la différence en longitude $\varphi' - \varphi$, elle ne peut être calculée aussi aisément : voici comme l'on parvient à son expression.

Pour décomposer en deux parties, s'il est possible, le second membre de la première équation (c'), soit fait

$$d\varphi' = \frac{dx \cos V'}{1 - \sin^2 V' \cos^2 x} + \frac{C d\cdot \cos V'}{a(1 - \sin^2 V' \cos^2 x)};$$

C étant un coefficient qu'il s'agit de déterminer ; et soient égalées entre elles les deux valeurs de $d\varphi'$, on trouvera sur le champ

$$C = -(a-b)\sqrt{1+\epsilon\sin^2 l'\cos^2 x}\,;$$

ainsi le deuxième terme de la valeur hypothétique de $d\varphi'$ prend la forme suivante,

$$-dx\cos l'\left[\frac{a-b\sqrt{1+\epsilon\sin^2 l'\cos^2 x}}{a(1-\sin^2 l'\cos^2 x)}\right];$$

et en multipliant haut et bas par $a+b\sqrt{1+\epsilon\sin^2 l'\cos^2 x}$, puis se rappelant que $a^2-b^2=b^2\epsilon$, on a

$$-\frac{b^2\epsilon\cos l'}{a}\cdot\frac{dx}{a+b\sqrt{(1+\epsilon\sin^2 l'\cos^2 x)}};$$

donc la valeur de $d\varphi'$ devient

$$d\varphi' = \frac{dx\cos l'}{1-\sin^2 l'\cos^2 x} - \frac{b^2\epsilon\cos l'}{a}\cdot\frac{dx}{a+b\sqrt{(1+\epsilon\sin^2 l'\cos^2 x)}}.$$

Enfin prenant l'angle ω', d'après la formule

$$\text{tang}\,\omega' = \frac{\text{tang}\,x}{\cos l'}$$

donnée par la propriété du triangle sphérique rectangle *pma*, et faisant attention qu'à cause de $d\omega' = \frac{d.\text{tang}\,\omega'}{1+\text{tang}^2\omega'}$, d'où $d\omega' = \frac{dx\cos l'}{1-\sin^2 l'\cos^2 x}$; on a

$$d\varphi' = d\omega' - \frac{b^2\epsilon\cos l'}{a}\cdot\frac{dx}{a+b\sqrt{(1+\epsilon\sin^2 l'\cos^2 x)}}\ldots\ldots(d').$$

Avant d'intégrer cette équation, il convient d'y faire encore subir une transformation pour la composer des seules quantités relatives au triangle *MPM'* : or on a, par ce qui précède,

$$a = b\sqrt{1+\epsilon},\quad \cos l' = \sin V\cos\psi \quad\text{et}\quad \cos\mu = \frac{\sin\psi}{\sin l'};$$

donc

$$d\varphi' = d\omega' - \frac{d\xi.\epsilon\sin V\cos\psi}{2(1+\epsilon-\frac{1}{4}\epsilon\cos^2\psi)}$$
$$= d\omega' - \tfrac{1}{2}\,d\xi.\epsilon\sin V\cos\psi\,(1-\epsilon+\tfrac{1}{4}\epsilon\cos^2\psi);$$

et intégrant entre les limites m et m', il vient

$$\varphi' - \varphi = \omega' - \omega - \tfrac{1}{2}\epsilon\xi \sin V \cos\psi\,(1 - \epsilon + \tfrac{7}{4}\epsilon\cos^2\psi),$$

$\omega' - \omega$ étant la différence en longitude des méridiens pm', pm sur une sphère du rayon b. Mais dans ce cas,

$$\omega' = \omega + \left(\frac{d\omega'}{d\xi}\right)\xi + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\omega'}{d\xi^2}\right)\xi^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{d^3\omega'}{d\xi^3}\right)\xi^3 + \ldots$$

Ainsi déterminant la valeur des coefficiens différentiels, à l'aide des relations (6), on obtient avec un peu d'attention,

$$\begin{aligned}\omega' - \omega = {} & \xi\frac{\sin V}{\cos\psi} - \xi^2\frac{\sin V\cos V}{\cos\psi}.\operatorname{tang}\psi \\ & + \tfrac{1}{3}\xi^3\frac{\sin V\cos^2 V}{\cos\psi}(4\operatorname{tang}^2\psi + 1) \\ & - \tfrac{1}{3}\xi^3\frac{\sin V\operatorname{tang}^2\psi}{\cos\psi},\end{aligned}$$

et ensuite

$$\begin{aligned}\varphi' - \varphi = {} & \xi\frac{\sin V}{\cos\psi} - \xi^2\frac{\sin V\cos V}{\cos\psi}.\operatorname{tang}\psi \\ & - \tfrac{1}{2}\epsilon\xi\sin V\cos\psi\,(1 - \epsilon + \tfrac{7}{4}\epsilon\cos^2\psi) \\ & + \xi^3\frac{\sin V\cos^2 V}{\cos\psi}(\tfrac{1}{3} + \operatorname{tang}^2\psi) \\ & - \xi^3\frac{\sin^3 V}{\cos\psi}(\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^2\psi);\end{aligned}$$

enfin si l'on exprime ξ en fonction de σ, l'on aura, toutes réductions faites,

$$\begin{aligned}(\varphi' - \varphi)\cos\psi = {} & \sigma\sin V\,(1 - \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{3}{8}\epsilon^2) \\ & - \sigma^2\sin V\cos V\operatorname{tang}\psi\,(1 - \epsilon + \tfrac{7}{8}\epsilon\cos^2\psi) \\ & + \sigma^3\sin V\cos^2 V(\tfrac{1}{3} + \operatorname{tang}^2\psi) \\ & - \sigma^3\sin^3 V\,(\tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^2\psi)\ldots\ldots\ldots\ldots(K).\end{aligned}$$

Ce sont ces formules mêmes que M. Legendre a publiées dans son savant Mémoire sur les triangles sphéroïdiques : bien entendu qu'il faudra, dans toutes, faire $\sigma = \frac{s}{b}r''$, $\sigma^2 = \frac{s^2}{b^2}r''$, $\sigma^3 = \frac{s^3}{b^3}r''$, afin d'avoir en secondes, les termes où ces quantités entrent comme facteurs. On juge, à leur inspection, de l'influence de l'excentricité

de la terre sur les quantités qui en dérivent, en y mettant pour ε sa valeur $\frac{e^2}{1-e^2}$ (nº 7); et elles mettent à même de pouvoir apprécier en outre le degré d'exactitude des formules (B) et (C) du nº 5 du *Traité de Topographie*; enfin elles sont sous une forme telle, que l'on peut aisément résoudre le problème suivant.

26. *Etant données les latitudes de deux points et leur différence en longitude, trouver leur plus courte distance sur le sphéroïde de révolution, et les azimuths de cette ligne géodésique.*

Soient pour données les latitudes vraies λ, λ' des points M, M', et $\Delta\varphi$ leur différence en longitude. On calculera d'abord les latitudes réduites ψ et ψ' à l'aide des formules $\tan \psi = \frac{b}{a} \tan \lambda$ et $\tan \psi' = \frac{b}{a} \tan \lambda'$, et faisant ensuite les quantités connues $\psi' - \psi = h$, $(\varphi' - \varphi) \cos \psi$ ou $\Delta\varphi \cos \lambda = k$, et les inconnues $\sigma \cos V = x'$, $\sigma \sin V = y'$, les deux équations (k'), (l') seront de la forme

$$k = Py' - Qx'y' + Rx'^2y' - Sy'^3 \ldots\ldots (m),$$
$$h = px' + qy'^2 - rx'y'^2 + sx'^2 \ldots\ldots (n),$$

$P, p, Q, q \ldots$ étant des coefficiens connus. Il serait très-pénible de déterminer rigoureusement x' et y' par l'un des procédés ordinaires d'élimination; mais puisqu'il suffit d'avoir une solution approchée jusqu'aux quantités du troisième ordre inclusivement, on l'obtiendra ainsi qu'il suit.

La valeur de y' déduite de la première équation, dans laquelle on peut supprimer le très-petit terme $-Sy'^3$, est

$$y' = \frac{k}{P - Qx' + Rx'^2} = \frac{k}{P}\left(1 + \frac{Q}{P}x' - \frac{R}{P}x'^2 + \frac{Q^2}{P^2}x'^2\right);$$

et de là

$$y'^2 = \frac{k^2}{P^2}\left(1 + \frac{3Q^2}{P^2}x'^2 + \frac{2Q}{P}x' - \frac{2R}{P}x'^2\right);$$

substituant cette valeur de y'^2 dans l'équation (n), on aura un résultat tout en x' et x'^2, et qui sera, en s'arrêtant aux termes du

troisième ordre,

$$h = px' + \frac{q}{P^2} k^2 \left(1 + \frac{2Q}{P} x'\right) - \frac{rx'k^2}{P^2}:$$

tirant la valeur de x', il vient pour première approximation;

$$x' = \frac{h - \frac{qk^2}{P^2}}{p + \frac{2qQ}{P^3} k^2 - \frac{rk^2}{P^2}} = \frac{h - \frac{qk^2}{P^2}}{p} \left(1 - \frac{2qQ}{P^3} k^2 + \frac{rk^2}{P^2}\right);$$

et en élevant au quarré, on a

$$x'^2 = \frac{h^2}{p^2} - \frac{2hk^2q}{p^2P^2}.$$

Maintenant si dans l'équation (n) l'on introduit les valeurs de x'^2 et de y'^2, et que l'on s'arrête toujours aux termes du troisième ordre, on trouvera

$$h = px' + \frac{qk^2}{P^2} + 2qQk^2x' - rk^2x' + \frac{sh^2}{p^2} - 2shk^2q,$$

équation de laquelle on tirera pour seconde approximation,

$$x' = \frac{h}{p} - \frac{qk^2}{pP^2} - \frac{sh^2}{p^3} + 2shk^2q - (2qQ - r)\, k^2h;$$

mais

$$P = \left(1 - \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{3}{8}\epsilon^2\right) \qquad p = 1 - \tfrac{1}{2}\epsilon \sin^2\psi + \tfrac{3}{8}\epsilon^2 \sin^4\psi$$
$$Q = \operatorname{tang}\psi\left(1 - \epsilon + \tfrac{3}{2}\epsilon^2\cos^2\psi\right) \qquad q = \tfrac{1}{2}\operatorname{tang}\psi\left(1 - \epsilon\sin^2\psi\right)$$
$$R = \left(\tfrac{1}{3} + \operatorname{tang}^2\psi\right) \qquad r = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3} + \operatorname{tang}^2\psi\right)$$
$$S = \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^2\psi \qquad s = \tfrac{1}{2}\epsilon \sin\psi \cos\psi;$$

donc x' ou

$$\begin{aligned}\sigma \cos V = {} & h\left(1 + \tfrac{1}{2}\epsilon \sin^2\psi - \tfrac{3}{8}\epsilon \sin^4\psi\right) \\ & - \tfrac{1}{2} k^2 \operatorname{tang}\psi\left(1 + \tfrac{1}{2}\epsilon + \tfrac{1}{2}\epsilon^2 \cos^2\psi\right) \\ & - \tfrac{1}{2} h^2\epsilon \sin\psi \cos\psi - \tfrac{1}{2} k^2h\left(\operatorname{tang}^2\psi - \tfrac{1}{3}\right),\end{aligned}$$

par suite y', ou

$$\begin{aligned}\sigma \sin V = {} & k\left(1 + \tfrac{1}{2}\epsilon - \tfrac{3}{8}\epsilon^2\right) + hk \operatorname{tang}\psi\left(1 + \tfrac{1}{2}\epsilon\right) \\ & - \tfrac{1}{3} kh^2 - \tfrac{1}{6} k^3 \operatorname{tang}^2\psi.\end{aligned}$$

De là il est aisé de déterminer l'azimuth V et la ligne géodésique $MM' = b\sigma$; car on a

$$\text{tang } V = \frac{y'}{x'} \quad \text{et} \quad \sigma^2 = x'^2 + y'^2.$$

Pour ce qui est de l'azimuth V', on l'obtiendra au moyen de la relation (4) du n° 24, qui donne

$$\sin V' = \frac{\sin V \cos \psi}{\cos \psi'};$$

le problème est donc complètement résolu.

27. L'exactitude de toutes les formules précédentes étant subordonnée à la petitesse de la ligne géodésique, M. Legendre a jugé convenable de publier d'autres formules dans lesquelles cette ligne peut être supposée aussi grande que l'on voudra. Comme j'ai déjà traité à cet égard le cas particulier où le triangle sphéroïdique est rectangle (*voyez* le n° 7 de ma *Topographie*), on pourra, en suivant l'analyse développée dans le présent chapitre, retrouver les formules qui conviennent au cas général; mais l'on conçoit que leur application doit être extrêmement rare. L'excellent Mémoire de M. Legendre, inséré parmi ceux de l'Institut (1[er] semestre de 1806, pag. 130), renferme d'autres détails très-intéressans, pour lesquels je ne puis mieux faire que d'y renvoyer le lecteur.

Explication d'un Tableau synoptique, dressé conformément aux formules que M. Delambre a données pour déterminer les coordonnées géographiques des sommets des triangles du premier ordre.

28. Les formules que je viens de démontrer d'une manière nouvelle, sous plusieurs rapports, n'étant pas celles que les Ingénieurs-Géographes emploient de coutume, j'ai dû insister particulièrement, dans mes *Traités de Géodésie* et de *Topographie*, sur l'usage de formules analogues dépendantes d'une théorie moins rigoureuse, mais suffisamment exactes pour les besoins ordinaires de la Géographie. Celles de M. Delambre qui font partie de ces dernières

ayant prévalu au Dépôt général de la Guerre, j'ai cherché à en reudre les applications faciles, en présentant sous la forme de tableau synoptique, tous les calculs auxquels elles donuent lieu. C'est l'explication de ce tableau que je me propose de donner en ce moment, persuadé que son usage mérite quelque préférence sur la méthode de l'art. 84 du *Traité de Géodésie*.

J'ai indifféremment désigné daus ce Supplément, par λ et L la latitude vraie d'un point quelconque du sphéroïde terrestre; ici je m'en tiendrai à la seconde désignatiou, et je reuverrai à l'art. 83 de la *Géodésie* pour le surplus de la uotation introduite dans les formules qui sont en tête du tableau synoptique formant la Table III.

Pour cxemples de calculs, j'ai choisi les deux premiers triangles qui unissent la méridienne de France avec le réseau trigonométrique établi en Hollande par M. le général Krayeuhof, et pris à cet effet, pour latitude L du point de départ, celle de Dunkerque qui est de $51° 2' 10'',5$; pour premier azimuth Z compté du sud à l'ouest, celui de Cassel sur l'horizon de Dunkerque, lequel, suivant M. Delambre, $= 343° 13' 32'',4$.

Les deux autres élémens primitifs sont la longitude M de Dunkerque, et le logarithme du côté K de Dunkerque-Cassel. Or, le premier élément est, d'après la *Connaissance des Temps*, $M = 359° 57' 37''$; et le deuxième, suivant M. Delambre, est K en arc $= 27458^m,615$, d'où $\log K = 4,4386784$. De sorte que sur la ligne de Dunkerque sont eu leurs lieux conveuables $\log K$, L, Z et M; ces trois derniers élémens y étant exprimés en grades.

CALCUL DES LATITUDES.

Pour calculer d'abord l'angle φ qui est l'amplitude du côté K; au-dessous de $\log K = 4,4386784$, on mettra le logarithme du facteur fourni par la Table IV de l'*Instruction du Dépôt*, ou par la Table III du *Traité de Géodésie*. Ce logarithme répondant à la latitude de $56^g,7$ est $8,9985684$; la somme de ces deux logarithmes forme celui de φ réduit en secondes centésimales. Cette somme se

porte dans la première colonne des latitudes. On cherche ensuite le cosinus de Z, c'est-à-dire de $381^{\circ},361850$ qui est positif; ainsi le premier terme $2620'',37$ de la correction de latitude est positif; et notez bien que ce cosinus est le même que le sinus de $81^{\circ},361850$.

On passera ensuite au calcul du second terme : or dans la colonne qui le renferme, on a pour premier logarithme, 3,8950899, qui est celui de log $\frac{1}{2}$ sin 1" centésimale. On double le logarithme de φ que l'on écrit au-dessous de celui-ci; on cherche ensuite le log sin Z qui est négatif, parceque le sinus de $381^{\circ},361850$ est situé au-dessous du diamètre : ce sinus n'est autre que le cosinus de $81^{\circ},361850$. On écrit donc deux fois de suite $-9,4603007$. Enfin l'on cherche le log tang ($L = 56^{\circ},70695$), et la somme 9,7823776 doit être affectée du signe +, puisque le produit de deux quantités affectées du même signe est positif. Le deuxième terme $0'',61$ est donc encore positif. La somme faite de celui-ci et du premier est $2620'',98$, comme on le voit dans la première colonne; c'est ce qui compose la correction dL, parceque cette somme serait la seule correction de latitude, si la terre était sphérique.

Pour procéder au calcul du troisième terme renfermé dans la troisième colonne, et qui dépend uniquement de l'excentricité e de la terre, on cherchera la valeur du terme $e^2 \cos^2 L$ dans la première partie de la Table VII de l'*Instruction du Dépôt*, ou VI de la *Géodésie;* l'on trouvera qu'à la latitude $L = 56^{\circ},7$, ce terme répond au nombre 0,0023578 qui doit toujours être considéré comme positif. Ensuite on cherchera dans la deuxième partie de la même Table, le second terme de la correction d'excentricité. Voici à quoi il faut faire attention. D'abord l'argument principal est la latitude $L = 56^{\circ}$, et le second argument est la valeur de dL obtenue ci-dessus. Ce second argument se trouve dans l'une des cases qui contiennent $1000''$, $2000''$, $3000''$.... $9000''$; de sorte que cette seconde partie de la Table est à double entrée. Dans le cas actuel, on cherche le nombre qui répond à la fois à 56° et à $2620'',98$, ou plutôt à $3000''$, parceque cette approximation est suffisante; on a donc le nombre 0,0000207, et ce second terme est toujours de même signe que dL; il est donc dans ce cas positif. L'un et l'autre additionnés, donnent pour somme 0,0023785; et notez bien

encore que par le mot *somme*, on entend la réunion des nombres, en ayant égard à leurs signes, comme dans la réduction algébrique.

Au logarithme du nombre 0,0023785 qui est 7,3763032, puisque ce nombre est fractionnaire, on ajoute le logarithme de $dL = 3,4184638$ que l'on affecte toujours du signe de dL. Ce logarithme est donc maintenant positif. Il résulte de là que la *correction d'aplatissement* est positive et de 6",23. Cette correction s'ajoute avec son signe à la valeur de dL; et l'on voit, par le tableau, que la somme des deux corrections est elle-même positive et de 2627",21.

Enfin l'on porte cette somme dans la quatrième colonne, où on l'écrit toujours avec un signe contraire : on a parconséquent dans cet exemple, —0,26272. Somme faite (en ayant toutefois égard aux signes), on a définitivement pour la latitude vraie L' de Mont-Cassel, 56°,44423.

On voit dans la troisième colonne des latitudes et dans le dernier exemple, un cas où le second terme de la *correction d'aplatissement* est négatif, parceque dL se trouve négative ; ce terme est—0,0000069, et répond à $dL = -1036",68$; mais dans l'usage de la seconde partie de la Table VII, on a supposé simplement $dL = -1000"$, par la raison exposée plus haut.

CALCUL DES AZIMUTHS.

La première colonne comprend le premier terme de la correction : on y voit le logarithme 9,4603007 affecté du signe —, ce qui doit être en effet, puisque c'est le même qui a été employé dans le calcul de la latitude : les deux autres sont essentiellement positifs ; ainsi, à cause que les signes sont en nombre impair, le premier terme dont il s'agit est négatif et = —968".451.

La deuxième colonne est consacrée au calcul du deuxième terme de la correction ; on y voit pour premier logarithme 3,8950899 qui est le log const $\frac{1}{2}$ sin 1" déjà employé dans le calcul de la latitude. Ensuite vient le logarithme de φ^2, également employé dans ce calcul ; ainsi

ainsi que ceux de sin L et de cos L. Somme faite de ces quatre logarithmes, on a pour deuxième terme de la correction, — 1",625, vu que les signes — sont en nombre impair. Les deux termes étant ajoutés ensemble comme les quantités algébriques, on a pour résultat —970",076; c'est la correction totale que l'on porte toujours avec un signe contraire dans la troisième colonne, ainsi qu'on le voit. Enfin faisant une somme des nombres renfermés dans cette dernière, on a pour l'azimuth Z' de Dunkerque sur l'horizon de Mont-Cassel, 181°,458858.

CALCUL DES LONGITUDES.

La première colonne comprend toute la correction de longitude. Dans le premier exemple, le second logarithme 9,4603007 est affecté du signe —, et cela doit être d'après ce qui a été dit ci-dessus, puisque $Z = 381^{\circ},36185$. Quant au troisième logarithme 0,1992610, il est le complément du log cos ($L' = 56^{\circ},44423$). Le terme cherché est donc — 1249",71; on l'écrit toujours avec le même signe dans la seconde colonne, et le résultat est 399°,8309; c'est la longitude de Mont-Cassel.

Il ne faut pas oublier d'employer toujours, dans tous les calculs, les angles sphériques des triangles qui concourent à former les valeurs de Z.

CALCUL DES DIFFÉRENCES DE NIVEAU.

Ce calcul est extrêmement simple, et il le devient davantage quand, à la formule exacte du tableau, l'on peut substituer la suivante, $H = K$ tang $\frac{1}{2}(\delta' - \delta)$ [n° 106, *Géodésie*). Or cette substitution est presque toujours permise dans les triangulations primaires, parceque, quoique les hauteurs ou les dépressions des signaux soient ordinairement très-petites, l'amplitude φ de la distance K n'en est pas moins d'un petit nombre de minutes. Cependant il ne s'agira en ce moment que de la formule rigoureuse.

J'observerai d'abord que l'exactitude mathématique exige dans le calcul des latitudes, longitudes et azimuths, l'emploi de l'arc de distance entre les signaux, et que l'on introduise au contraire la

corde de cet arc dans le calcul des différences de niveau, par les formules de M. Delambre; mais, vu la très-petite différence qui existe dans la pratique entre un arc et sa corde, on peut tout simsimplement prendre l'une de ces ligues pour l'autre, et même supposer, dans ce dernier calcul, que la distance K donnée par la résolution des triangles, ne diffère pas sensiblement de celle qui lui répond au niveau de l'un des sommets des deux signaux dont on cherche la différence de hauteur.

Le signe $\backsim$ employé dans la formule du tableau, est pour indiquer que la différence $\delta' \backsim \delta$ qui entre au dénominateur, doit toujours être prise positivement; ainsi le signe de H qui dépend uniquement de celui du numérateur $\sin \frac{1}{2}(\delta' - \delta)$, sera positif ou négatif selon que l'angle $\delta' - \delta$ sera lui-même positif ou négatif.

Dans l'exemple que présente le tableau, la distance apparente au zénith du sommet du signal de Hondscoten, vu de Dunkerque, est $\delta = 99^c{,}97916$; et la distance apparente au zénith du sommet du signal de Dunkerque, vu de Hondscoten, est $\delta' = 100^c{,}10193$; de sorte que $\frac{\delta' - \delta}{2} = 0^c{,}06138$, comme on le voit dans la première colonne des différences de niveau. A ce nombre, considéré toujours comme positif, on ajoute $\frac{1}{2}\varphi = 0^c{,}079334$ obtenu dans la colonne intitulée *angle* φ, et la somme $1407''{,}14$ est la valeur de $\frac{1}{2}(\delta' \backsim \delta + \varphi)$.

Passant à la deuxième colonne des différences de niveau, l'on trouve pour premier logarithme 4,2019243, c'est celui de la distance de Dunkerque à Hondscoten; pour second logarithme 6,9841468, c'est celui de $\sin \frac{1}{2}(\delta' - \delta)$; pour troisième logarithme 0,0000011, c'est le complément arithmétique de $\log \cos \frac{1}{2}(\delta' \backsim \delta + \varphi)$. La somme de ces trois logarithmes répond au nombre $15^m{,}349$ qui est la valeur de H, ou la quantité dont le sommet du signal de Hondscoten est plus élevé que celui du signal de Dunkerque. Ce nombre étant positif, on l'écrit avec le signe + dans l'avant-dernière colonne du tableau; et comme le sommet du signal de Dunkerque est élevé au-dessus de l'Océan, de $67^m{,}573$, il s'ensuit que le sommet du signal de Hondscoten est à $82^m{,}922$ au-dessus de ce niveau; ainsi...... $N' = 82^m{,}922$.

Pour former les calculs de la dernière colonne, c'est-à-dire, pour avoir les hauteurs des sols au-dessus du niveau de la mer, il ne s'agirait que de retrancher les hauteurs des signaux des valeurs de N'; ce qui est évident.

Il faut bien faire attention que les valeurs de δ et δ' données ci-dessus, sont les distances au zénith observées et réduites aux sommets des signaux (n° 26, *Topographie*).

29. Maintenant, pour faire voir pourquoi j'ai introduit le signe $\backsim$ dans la formule qui donne la différence de niveau par deux obsertions réciproques et simultanées, ou du moins faites dans deux circonstances semblables, je vais démontrer cette formule pour les deux cas qui se présentent dans la pratique.

Soit δ la distance apparente au zénith du point B, observée de la station A, et δ' la distance apparente au zénith du point A, observée de B (fig. 37, *Géodésie*). Soit en outre φ l'angle que forment les deux verticales passant par A et B et se coupant au point C; H la différence de niveau cherchée; ρ le rayon de la sphère dont la surface s'écarte le moins possible de celle d'une terre aux lieux d'observation (n° 9, *Topographie*); r, r' les réfractions dont les distances apparentes δ, δ' se trouvent respectivement affectées; enfin D, D' les distances vraies $\delta + r$, $\delta' + r'$.

Si l'on suppose d'abord $\delta < \delta'$, le triangle rectiligne ABC donnera évidemment

$$\sin D' : \rho :: \sin D : \rho + H,$$

d'où

$$H = \rho\left(\frac{\sin D - \sin D'}{\sin D}\right):$$

puis à cause de $\sin D - \sin D' = 2\cos\left(\frac{D+D'}{2}\right)\sin\left(\frac{D-D'}{2}\right)$, et de $\frac{D+D'}{2} = 100^G + \frac{\varphi}{2}$, ou de $\cos\left(\frac{D+D'}{2}\right) = -\sin\frac{\varphi}{2}$, on a

$$H = \frac{2\rho\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{1}{2}(D'-D)}{\sin(200-D')} = \frac{2\rho\sin\frac{\varphi}{2}\sin\frac{1}{2}(D'-D)}{\cos\frac{1}{2}(D-D'-\varphi)};$$

mais en général $\cos(x) = \cos(-x)$ et $\sin\frac{\varphi}{2} = \left(\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{1}{2.3}\left(\frac{\varphi}{2}\right)^3 + \ldots$; de plus $\rho\varphi = K_1$, K_1 étant l'arc qui mesure la distance des stations A, B, et dont la corde est K; ainsi

$$H = \left(K_1 - \frac{K_1^3}{24\rho^2}\right)\frac{\sin\frac{1}{2}(D'-D)}{\cos\frac{1}{2}(D'-D+\varphi)}$$
$$= \frac{K\sin\frac{1}{2}(D'-D)}{\cos\frac{1}{2}(D'-D+\varphi)};$$

comme je l'ai déjà démontré autrement (art. 106, *Géodésie*).

Supposons maintenant $D > D'$, le triangle ABC donnera

$$\sin D : \rho :: \sin D' : \rho + H;$$

parconséquent

$$H = \rho\left(\frac{\sin D' - \sin D}{\sin D}\right);$$

et par suite, en procédant comme ci-dessus, ou changeant dans le résultat précédent D en D', *et vice versâ*,

$$H = \left(K_1 - \frac{K_1^3}{24\rho^2}\right)\frac{\sin\frac{1}{2}(D'-D)}{\cos\frac{1}{2}(D-D'+\varphi)}$$
$$= \frac{K\sin\frac{1}{2}(D'-D)}{\cos\frac{1}{2}(D-D'+\varphi)}.$$

On voit donc, en comparant ces deux valeurs de H, dont l'une est positive et l'autre négative, qu'il est nécessaire, pour les comprendre dans une seule formule, d'écrire

$$H = \frac{K\sin\frac{1}{2}(D'-D)}{\cos\frac{1}{2}(D' \backsim D - \varphi)}, \quad \text{ou bien} \quad H = \frac{K\sin\frac{1}{2}(\delta'-\delta)}{\cos\frac{1}{2}(\delta' \backsim \delta + \varphi)};$$

car la réfraction ne modifie en rien ce résultat. En effet, toute petite portion de trajectoire décrite par un rayon de lumière qui traverse les couches inférieures de l'atmosphère, se confond sensiblement avec son cercle osculateur : or dans ce cas, les tangentes menées par les extrémités de cette trajectoire, forment avec la corde joignant les points de contact, des angles égaux qui sont précisément ceux de réfraction ; donc dans les observations réciproques et simultanées, la différence $\delta' - \delta$ des distances apparentes au zénith de deux objets terrestres peu élevés au-dessus de l'horizon, est égale à la différence $D' - D$ des distances vraies.

Quand on n'a qu'une seule observation de distance au zénith, la formule précédente n'est plus propre à faire connaître les différences de niveau. Soit δ l'unique distance apparente au zénith observée, et supposons pour un moment que la réfraction soit nulle; le triangle ABC donnera, en conservant d'ailleurs la notation employée ci-dessus,

$$\sin\delta : \rho + H :: \sin(\delta - \varphi) : \rho,$$

d'où

$$H = \rho\left(\frac{\sin\delta - \sin(\delta-\varphi)}{\sin(\delta-\varphi)}\right),$$

et par suite

$$H = 2\rho \sin\frac{\varphi}{2} \cdot \frac{\cos(\delta-\varphi)\cos\frac{\varphi}{2} - \sin(\delta-\varphi)\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin(\delta-\varphi)}$$

$$= 2\rho\sin\frac{\varphi}{2}\left(\cot(\delta-\varphi)\cos\frac{\varphi}{2} - \sin\frac{\varphi}{2}\right);$$

développant le second membre de cette équation, et ordonnant par rapport aux puissances de l'angle φ, on aura, en s'arrêtant aux termes du second ordre,

$$H = \rho\varphi\,(\cot\delta + \operatorname{tang}\varphi) - \frac{\rho\varphi^2}{2}$$

$$= \rho\varphi\cot\delta + \frac{\rho\varphi^2}{2} = K_1\cot\delta + \frac{K_1^2}{2\rho}.$$

Telle serait la hauteur H cherchée, si les rayons de lumière n'éprouvaient aucune réfraction; mais, dans les cas ordinaires, les densités des couches de l'atmosphère vont en diminuant de bas en haut, et pour lors les objets paraissent plus élevés qu'ils ne le sont effectivement; la valeur de H, que l'on vient de trouver, est donc trop grande d'une quantité ΔH due à la réfraction. Or, pour de très-petites hauteurs, cette réfraction est proportionnelle à l'arc φ, c'est-à-dire que $r = n\varphi$ (art. 103, *Géodésie*); ainsi de la propriété du petit triangle formé par la trajectoire, la corde AB de cette trajectoire et la hauteur ΔH opposée à l'angle r, et de ce que $AB = \frac{\rho\sin\varphi}{\sin(\delta-\varphi)}$, l'on tire à très-peu près,

$$\Delta H = \rho\varphi^2 \cdot \frac{n}{\sin^2\delta} = \frac{K_1^2}{\rho} \cdot \frac{n}{\sin^2\delta};$$

partant $H - \Delta H$, ou simplement

$$H = \frac{K_1^2}{2\rho}\left(1 - \frac{2n}{\sin^2\delta}\right) + K_1 \cot \delta.$$

Il est aisé de s'assurer de l'identité de cette formule avec celle que M. Laplace a donnée dans sa *Mécanique Céleste* (tome IV, p. 279) : il ne l'est pas moins de voir qu'elle a la même exactitude que la suivante,

$$H = K \cot\left(\delta + r - \frac{\varphi}{2}\right)$$
$$= K \cot\left(\delta + \frac{2n-1}{2}\varphi\right),$$

démontrée à l'art. 106 de la *Géodésie*, et que l'on a coutume d'employer.

Lorsque la valeur du coefficient n de la réfraction ne peut se déduire d'aucune observation directe, faite à l'époque où les distances au zénith ont été prises, on la suppose ordinairement de $+ 0{,}08$. Dans le cas d'une réfraction extraordinaire, n peut être négatif ; mais il n'y a que l'observation qui puisse véritablement faire connaître ce coefficient et le signe dont il doit être affecté (art. 105, *Géodésie*).

Le Savant illustre auquel on est redevable d'une théorie complette des réfractions atmosphériques, a donné en outre des formules pour calculer de grandes différences de niveau, ainsi que les hauteurs des montagnes très-élevées au-dessus de la mer ; ce sont celles que j'ai rapportées aux pages 315 et 33 de mes *Traités de Géodésie et de Topographie*, et sur l'application desquelles je crois n'avoir laissé rien à désirer. La réfraction terrestre présente, dans différens états de l'atmosphère, des phénomènes très-singuliers et dignes de toute l'attention des Physiciens-Géomètres. Voyez à ce sujet un ouvrage que M. Biot vient de publier, lequel a pour titre : *Recherches sur les Réfractions extraordinaires qui ont lieu près de l'horizon.*

Formules pour évaluer l'effet que produit sur la latitude et la longitude des points fondamentaux d'une carte, une très-petite variation dans l'azimuth de départ.

30. La méthode du n° 10 de ma *Topographie* a seulement rapport aux petites variations dans les distances d'un point à la méridienne et à sa perpendiculaire : ici je me propose de résoudre le problème plus généralement. En supposant donc que les latitudes et longitudes de tous les points principaux d'un réseau trigonométrique aient été calculées à l'aide d'un azimuth provisoire, il s'agit de faire à ces latitudes et longitudes les corrections dues à l'erreur commise sur cet azimuth, sans recourir pour cela aux formules précédentes, ni à d'autres qui rempliraient le même objet.

Comme les distances entre les points trigonométriques sont censées avoir été déterminées exactement, la nouvelle orientation s'effectue sur-le-champ en faisant tourner tout le réseau autour du point où l'on a observé l'azimuth, d'une quantité angulaire égale à la différence de l'azimuth vrai à l'azimuth approché. En effet, soit A le lieu de l'observation, B un sommet quelconque de triangle, Fig. 15.
et C le pôle de la terre que l'on peut supposer sphérique dans cette circonstance. Si, en vertu de la variation observée dans l'angle BAC, le point B doit être transporté en B' : tout autre point b lié invariablement au premier sera, par suite du mouvement commun autour de A, transporté en b'; et l'angle bAb', qui est égal à BAB', sera la variation d'azimuth, variation que je supposerai de quelques secondes seulement. La question, envisagée sous ce point de vue, est donc ramenée à chercher les équations différentielles d'un triangle sphérique, dans lequel un angle est variable et les deux côtés qui le comprennent sont constans.

Soit ABC ce triangle, et a, b, c les côtés opposés aux angles de mêmes dénominations ; on aura, d'après les propriétés connues des

triangles sphériques,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \ldots\ldots (1),$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \ldots\ldots (2),$$
$$\sin A \sin c = \sin a \sin C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Si l'on différencie les deux premières équations, en faisant varier A, a et C, et regardant c et b comme constans, on aura

$$\sin a da = \sin b \sin c \sin A dA,$$

$$o = -\cos b \sin a da + \sin b \cos C \cos a da - \sin a \sin b \sin C dC;$$

mais de la troisième équation l'on tire $\sin c = \frac{\sin a \sin C}{\sin A}$: mettant cette valeur dans la première équation différentielle, on obtient

$$da = \sin b \sin C dA \ldots\ldots (m),$$

et introduisant cette valeur dans la seconde, on a

$$dC = -\cos b\,(1 - \cot a \tang b \cos C)\, dA \ldots (n).$$

Soit maintenant L la latitude vraie du point A, L' la latitude approchée du point B, Z l'azimuth approchée du côté BA observé sur l'horizon de A, et compté du sud à l'ouest, depuis o jusqu'à 400ᶜ; enfin P' la différence approchée des longitudes des points A et B; les formules de correction (m) et (n) seront respectivement

$$dL' = \cos L \sin P' dZ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (m'),$$
$$dP' = \sin L\,(1 - \tang L' \cot L \cos P')\, dZ \ldots\ldots (n'),$$

puisqu'à la seule inspection de la figure, on voit que $da = -dL'$, $dA = -dZ$ et $dC = dP'$.

Il résulte de là que

latitude vraie du point $B = L' + dL'$,
différence de longitude des points A et $B = P' + dP'$.

L'emploi de ces formules n'est sujet à aucune difficulté; j'observerai seulement

seulement que la variation d'azimuth dZ doit être prise avec son signe (*), et que Z doit ici se compter du sud à l'est : ce serait le contraire s'il s'agissait du point b.

(*) Je me permettrai en ce moment une digression utile, laquelle a pour objet de procurer une formule plus exacte que celle de l'art. 121 du *Traité de Géodésie*, pour calculer l'instant précis du passage du soleil au méridien par les hauteurs correspondantes ; parce que j'ai supposé tacitement que les réfractions à hauteurs égales, pour les époques du matin et du soir, étaient elles-mêmes égales, quoique cela ait rarement lieu.

Soit A le zénith, C le pôle, B et b les lieux du soleil avant et après midi. La différentiation de l'équation (1) ci-dessus en y faisant tout varier, excepté b, donne Fig. 18.

$$dC = \frac{\sin c dc}{\sin a \sin b \sin C} + da\left(\frac{1}{\tang a \tang C} - \frac{1}{\tang b \sin C}\right);$$

ou, en adoptant la notation de l'article cité, réduisant en secondes sexagésimales de tems, faisant attention aux signes des variations et à ce que $dc = dr''$ est la différence des réfractions r et r' qui ont lieu avant et après le passage au méridien, on a pour correction additive, et lorsque l'astre s'avance vers le nord,

$$\frac{dP}{2} = \frac{dr''.\sin Z}{30 \cos L \cos D \sin P} - \frac{dD''}{30}\left(\frac{\tang L}{\sin P} - \tang D \cot P\right);$$

telle est l'équation des hauteurs correspondantes, en ayant égard à la réfraction : appliquée aux étoiles, elle se réduit à

$$\frac{dP}{2} = \frac{dr'' \sin Z}{30 \cos L \cos D \sin P};$$

vu que la variation dD'' en déclinaison est nulle. Il est aisé de s'assurer que le terme dépendant de dr'' est positif ou négatif, selon que la réfraction est plus faible ou plus forte le soir que le matin. On calculera les réfractions r et r' au moyen des observations du baromètre et du thermomètre pour la hauteur moyenne apparente $90° - Z$, et l'on exprimera dr'' en secondes de degrés.

Il suit de là que si m est, en tems de la pendule, l'instant approché du passage au méridien, $m + \frac{dP}{2}$ sera toujours l'instant exact de ce passage.

Je n'ai pas besoin de rappeler qu'il est nécessaire de changer le signe de dD'', dans la formule ci-dessus, lorsque le soleil retourne au sud ; et d'y prendre tang D négativement quand sa déclinaison est australe, ainsi que cot P, si P est plus grand qu'un quadrant.

CHAPITRE V.

Construction des Cartes réduites, en ayant égard à l'aplatissement de la terre.

Formules pour calculer les Latitudes croissantes.

51. Il est peu d'auteurs d'Hydrographie qui, en traitant de la construction des *cartes réduites*, n'aient pas considéré la terre comme un ellipsoïde de révolution, et tenu compte de son aplatissement. En effet, cela est indispensable lorsqu'on desire mettre beaucoup d'exactitude dans les divers problèmes de Navigation. Les observations suivantes, en se rattachant naturellement à ce qui précède, complètent en même temps la théorie du n° 44 du *Traité de Topographie* qui peut intéresser quelques lecteurs.

J'ai déjà observé, dans cet ouvrage, qu'un vaisseau suivant le même *rumb* de vent, décrirait sur la surface des mers une courbe à double courbure dont la principale propriété serait de couper sous le même angle, chaque méridien qu'elle traverserait. C'est à cette ligne que l'on a donné le nom de *loxodromie* ou de *course oblique.* Ainsi une ligne loxodromique, qui fait un angle oblique avec un méridien, est une sorte de spirale qui s'approche sans cesse de l'un des pôles, sans jamais l'atteindre. En effet, s'il était possible qu'une telle ligne passât par le pôle, il faudrait qu'elle fît à la fois à ce point le même angle avec tous les méridiens, ce qui est impossible : le pôle est donc un point asymptote à l'égard de la ligne dont il s'agit.

L'espèce de projection qui est la plus propre à faciliter la réduction des routes, est celle admise pour la construction des cartes réduites. Sur ces cartes, dont on attribue l'invention à Mercator,

les méridiens et les parallèles étant des lignes droites perpendiculaires entre elles comme sur le globe, il en résulte que la projection d'une loxodromie est une ligne droite qui jouit aussi évidemment de la propriété de faire le même angle avec les méridiens. De plus, les intervalles qui séparent les parallèles y croissent à mesure que leur latitude augmente, et de telle sorte que, quoique les grades des parallèles aient constamment la même longueur, les grades des méridiens et ceux des parallèles conservent néanmoins entre eux leurs rapports réels : c'est pour cette raison que les cartes réduites se nomment aussi *cartes par latitudes croissantes*.

Cela posé, si ds' est un élément du méridien de la carte, et ds un élément analogue du méridien correspondant sur la terre, et que λ soit la latitude de l'extrémité de s, l'origine de cet arc elliptique étant à l'équateur; on aura, en désignant d'ailleurs par ρ le rayon du parallèle dont λ est la latitude, par a celui de l'équateur, et en satisfaisant à la condition que l'on vient d'énoncer,

$$ds' : ds :: a : \rho,$$

ou (n° 7),

$$ds' : \frac{a(1-e^2)\,d\lambda}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{3}{2}}} :: 1 : \frac{\cos\lambda}{(1-e^2\sin^2\lambda)^{\frac{1}{2}}},$$

ce qui donne

$$ds' = \frac{a(1-e^2)\,d\lambda}{\cos\lambda\,(1-e^2\sin^2\lambda)}.$$

Reste à intégrer cette équation : pour y parvenir, on remarquera que $\frac{(1-e^2)\,d\lambda}{\cos\lambda\,(1-e^2\sin^2\lambda)}$ se décomposant en ces deux parties..... $\frac{d\lambda}{\cos\lambda} - e\,\frac{d.e\sin\lambda}{1-e^2\sin^2\lambda}$, on a

$$s' = a\left[\int\frac{d\lambda}{\cos\lambda} - e\int\frac{d.e\sin\lambda}{1-e^2\sin^2\lambda}\right];$$

et parconséquent

$$s' = a\left[\log\tang\tfrac{1}{2}(100^\circ+\lambda) - \tfrac{1}{2}e\log\left(\frac{1+e\sin\lambda}{1-e\sin\lambda}\right)\right];$$

il n'y a point de constante à ajouter, parceque $s'=0$ lorsque $\lambda=0$.

On a coutume de présenter cette valeur de s' sous une forme plus simple. Pour cet effet, soit $e\sin\lambda = \sin\theta$, on aura évidemment, à cause de $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = \text{tang}^2\,\frac{1}{2}(100^c+\theta)$,

$$s' = a\left[\int\frac{d\lambda}{\cos\lambda} - e\int\frac{d\theta}{\cos\theta}\right] = a\left[\begin{array}{l}\log\text{tang}\,\frac{1}{2}(100^c+\lambda)\\ -e\log\text{tang}\,\frac{1}{2}(100^c+\theta)\end{array}\right];$$

mais on peut aussi la réduire en série, et cela, de plusieurs manières différentes; d'abord comme en général, $\log\left(\frac{1+u}{1-u}\right) = 2\left(u+\frac{u^3}{3}+\frac{u^5}{5}+\ldots\ldots\right)$, on a, en faisant usage des logarithmes ordinaires, et désignant le module 2,302585093 par K',

$$s' = a\left[K'\log\text{tang}\,\frac{1}{2}(100^c+\lambda) - e^2\left(\sin\lambda+\frac{e^2}{3}\sin^3\lambda+\frac{e^4}{5}\sin^5\lambda+\ldots\right)\right],$$

série très-régulière, et par laquelle on voit que le premier terme $aK'\log\text{tang}\,\frac{1}{2}(100^c+\lambda) = aK'\log\cot\frac{1}{2}(100^c-\lambda)$ est indépendant de l'aplatissement de la terre : ainsi pour la sphère, la latitude croissante s' exprimée en parties du rayon a pris pour unité, est égale au produit du module K' par le logarithme de la cotangente de la moitié du complément de la latitude λ.

D'un autre côté, il résulte du n° 18, que

$$e\int\frac{d.e\sin\lambda}{(1-e^2\sin^2\lambda)} = e^2(1+n)\int\frac{\cos\lambda.d\lambda}{1+n\cos 2\lambda}$$
$$= e^2\left(\frac{1+n}{1-n}\right)^{\frac{1}{2}}.(1-m)\left[\begin{array}{r}\sin\lambda-\frac{1}{3}m\sin 3\lambda+\frac{1}{5}m^2\sin 5\lambda\\ -\frac{1}{7}m^3\sin 7\lambda+\ldots\ldots\end{array}\right];$$

mais

$$e^2\left(\frac{1+n}{1-n}\right)^{\frac{1}{2}}.(1-m) = \frac{a^2-b^2}{a^2}.\frac{a}{b}.\frac{2b}{a+b} = \frac{2(a-b)}{a} = 2\alpha;$$

donc

$$s' = a\left[K'\log\text{tang}\,\frac{1}{2}(100^c+\lambda) - 2\alpha\left(\sin\lambda-\frac{1}{3}m\sin 3\lambda+\frac{1}{5}m^2\sin 5\lambda\ldots\right)\right].$$

Dans ces formules, s' est donné en mêmes unités que le rayon a de l'équateur; on l'aura en minutes centésimales ou en centigrades, en mettant $\frac{20000}{\pi} = R'$ au lieu de a : ainsi en s'arrêtant, dans la première série au terme en e^4, ce qui est toujours suffisant, vu la petitesse des termes ultérieurs, et en réduisant en minutes, on a

$$s' = R'\left[K' \log \operatorname{tang}\left(50^G + \frac{\lambda}{2}\right) - \frac{e^2}{1} \sin\lambda - \frac{e^4}{3} \sin^3\lambda \ldots\right].$$

Pour exemple, soit $\lambda = 48^G$, on aura

$$\operatorname{tang}\left(50^G + \frac{48}{2}\right) = \operatorname{tang} 74^G, \quad \text{et} \quad \log \operatorname{tang} 74^G = 0,3637743.$$

Premier terme.

$$\log K' = 0,3622157$$
$$\log 0,3637743 = 9,5608321$$
$$\log R' = 3,8038801$$
$$\log 1^{er} \text{ terme} = 3,7269279$$
$$1^{er} \text{ terme } 5332',464$$

Deuxième terme.

$$\log \sin 48^G = 9,8354033$$
$$\log e^2 = 7,7766329 -$$
$$\log R' = 3,8038801$$
$$\log 2^e \text{ terme} = 1,4159163 -$$
$$2^e \text{ terme } - 26',0565.$$

Troisième terme.

$$\log \sin^3\lambda = 9,50621$$
$$\log e^4 = 5,55327$$
$$\log R' = 3,80388$$
$$\text{compl. } \log 3 = 9,52288$$
$$\log 3^e \text{ terme} = 8,38624 -$$
$$3^e \text{ terme } - 0',0243.$$

Récapitulation.

1er terme.............. $53^G,324640$

2e terme $0^G,260565$ }
3e terme $0,000243$ } — $0,260808$

$s' = 53^G,063832.$

Ainsi lorsque la latitude simple est de 48^{c}, la latitude croissante $= 55^{c},063832$: c'est aussi ce que l'on trouverait si on employait l'expression finie de s'. Quand on formera une table, on abrégera beaucoup les calculs en faisant dans chaque terme une somme des logarithmes constans.

Si l'on se sert à cet effet de la seconde formule précédente, on aura en minutes centésimales, et en faisant usage des tables ordinaires,

$$s' = 14658',71198 \log \text{tang}\left(50^{c} + \tfrac{1}{2}\lambda\right) - 38',1209 \sin\lambda + 0',01905 \sin 3\lambda,$$

et en minutes sexagésimales,

$$s' = 7915',704468 \log \text{tang}\left(45^{\circ} + \tfrac{1}{2}\lambda\right) - 20',5852 \sin\lambda + 0,0102 \sin 3\lambda,$$

l'aplatissement α de la terre étant toujours supposé de $\frac{1}{334}$.

M. Delambre en publiant ce dernier résultat dans la *Connaissance des Temps* pour l'an XIII (1805), a donné en outre cette nouvelle formule,

$$s' = a \log \text{tang} \tfrac{1}{2}(100^{c} + \omega);$$

et supposé entre ω et λ la relation suivante,

$$\text{tang}\, \omega = \frac{b^2}{a^2} \text{tang}\, \lambda,$$

de laquelle on tire

$$\lambda - \omega = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right) \sin 2\lambda - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2 \sin 4\lambda + \frac{1}{3}\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^3 \sin 6\lambda - \ldots\ldots$$

Fig. 3. Or il n'est pas difficile de s'assurer que ω est l'angle formé par le rayon de l'équateur et le rayon de la terre aboutissant au point dont la latitude vraie est λ, et que la normale à ce point fait avec ce dernier rayon un angle ν égal à $\lambda - \omega$: ainsi

$$\omega = \lambda - \nu.$$

Donc en diminuant la latitude vraie d'une quantité égale à l'angle de la verticale avec le rayon, le calcul des latitudes croissantes, dans le sphéroïde de révolution, se peut faire comme dans la sphère. Mais voyons si cette nouvelle formule, mise ainsi sous forme finie, est réellement rigoureuse.

L'équation différentielle

$$ds' = \frac{a(1-e^2)\,d\lambda}{\cos\lambda\,(1-e^2\sin^2\lambda)} = a.\frac{b^2}{a^2}.\frac{d\lambda}{\cos\lambda\,(1-e^2\sin^2\lambda)}$$

devient, en vertu de la relation précédente,

$$ds' = a\left[\frac{d\omega}{\cos\omega}.\frac{\cos\lambda}{\cos\omega\,(1-e^2\sin^2\lambda)}\right];$$

de plus, à cause de

$$\cos\omega = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tang}^2\omega}} = \frac{1}{\left(1+\frac{b^4}{a^4}\text{tang}^2\lambda\right)^{\frac{1}{2}}},$$

et de

$$1 - e^2\sin^2\lambda = 1 - e^2\,\frac{\text{tang}^2\lambda}{1+\text{tang}^2\lambda} = \frac{1+\frac{b^2}{a^2}\text{tang}^2\lambda}{1+\text{tang}^2\lambda},$$

on a, en introduisant ces valeurs dans celle de ds', et faisant attention que $\cos\lambda = \frac{1}{\sqrt{1+\text{tang}^2\lambda}}$,

$$ds' = a\left\{\frac{d\omega}{\cos\omega}.\frac{\left(1+\frac{b^4}{a^4}\text{tang}^2\lambda\right)^{\frac{1}{2}}(1+\text{tang}^2\lambda)^{\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\text{tang}^2\lambda\right)}\right\},$$

équation qui, à cause que $\frac{b}{a}$ ne diffère pas beaucoup de l'unité, peut se réduire à

$$ds' = a.\frac{d\omega}{\cos\omega},$$

et qui donne, en intégrant,

$$s' = a\log\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(100^{\circ}+\omega) = a\log\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(100^{\circ}+\lambda-v).$$

Cette formule n'est donc qu'approximative ; néanmoins elle est une

des plus simples qui aient été proposées jusqu'à présent, pour calculer les latitudes croissantes sur le sphéroïde. Il serait pourtant possible de trouver un angle ν' tel que l'on eût exactement

$$s' = a \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(100^\circ + \lambda - \nu');$$

mais alors cet angle n'aurait plus la même signification que ν, et sa valeur se déduirait d'une équation peu commode pour le calcul numérique, comme il est facile de s'en assurer, en comparant cette valeur de s' avec cette autre

$$s' = a\left[\log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(100 + \lambda) - e \log \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(100 + \theta)\right]$$

obtenue plus haut. Tout bien considéré, les séries précédentes qui donnent les latitudes croissantes en fonctions de la latitude vraie, sont encore préférables dans la pratique; et elles sont tellement convergentes que l'on peut presque toujours borner l'approximation aux premiers termes dépendans de l'aberration de sphéricité.

Si au lieu d'intégrer la valeur ci-dessus de ds' entre les limites o et λ, on l'intégrait entre les limites λ et λ', on aurait, en supposant $\lambda' < \lambda$, désignant par C la valeur de s', et faisant usage de la notation abrégée du n° 10,

$$C = R'\left[K' \log \frac{\operatorname{tang}(50 + \frac{1}{2}\lambda)}{\operatorname{tang}(50 + \frac{1}{2}\lambda')} - 4\alpha\left(\begin{array}{r} \sin\frac{1}{2}\varphi \cos\frac{1}{2}\Phi - \frac{1}{3} m \sin\frac{3}{2}\varphi \cos\frac{3}{2}\Phi \\ + \frac{1}{5} m^2 \sin\frac{5}{2}\varphi \cos\frac{5}{2}\Phi - \ldots \end{array}\right)\right].$$

32. Voici maintenant la manière de construire les cartes réduites, lorsqu'on a calculé un nombre suffisant de *parties méridionales*, c'est-à-dire de parties du méridien principal de la carte.

Fig. 16. Supposons que cette carte s'étende depuis le 30ième jusqu'au 60ième grade de latitude, et soit comprise entre deux méridiens dont la différence de longitude $= 80^\circ$; et que l'on ait calculé les latitudes croissantes de $10'$ en $10'$. On formera un rectangle dont la base divisée en huit parties égales, et chacune de celle-ci en 10 parties égales, représentera.

sentera l'étendue de la carte en longitude ou l'échelle des grades de longitude. Ensuite on prendra dans la table des latitudes croissantes, les valeurs de 30°, 10'; 30°, 20'; 30°, 30'.... jusques à 60°; et on les soustraira successivement de la valeur de 30° de latitude. Les longueurs de ces restes étant prises sur l'échelle des grades de longitude, on les portera de bas en haut sur les hauteurs opposées du rectangle, qui sont les méridiens extrêmes de la carte, et l'on aura par ce moyen la graduation des *parties méridionales;* après quoi il sera facile de marquer, à l'aide des longitudes et latitudes connues, les îles, les écueils, le littoral des côtes, en un mot tout ce qui peut être un objet d'intérêt pour les Navigateurs. Il est entendu que ces graduations seront numérotées de la même manière que sur la sphère; car les nombres fournis par la table des latitudes croissantes, ou les valenrs de s', ne servent que pour déterminer sur la carte la grandeur absolue des grades de latitude. On lira donc, à partir du bas de la carte et en remontant vers le nord, 30°, 40°, 50°, 60°.

Pour diviser cette carte en feuilles d'assemblage, il serait assez naturel d'adopter le mode du n° 4, en prenant toutefois l'équateur pour le moyen parallèle.

Equation de la Loxodromie et conséquences qui en résultent.

33. Il faut bien remarquer que la distance rectiligne qui joint les projections de deux points du globe, n'est pas la projection de la plus courte distance curviligne de ces points; elle est même plus longue que la route que suivrait sous cette aire-de-vent, un vaisseau allant du premier au second point. On se convaincra de cette vérité en faisant attention qne, d'après la théorie du n° 24, les deux angles azimuthaux qu'une ligne géodésique ou de plus courte distance fait avec les méridiens de ses extrémités, sont toujours inégaux, tandis que le contraire a lien pour la loxodromie. Le problème de trouver l'équation de cette ligne, n'est sujet à aucune difficulté d'analyse; car par le numéro cité,

$$ds^2 = dq^2 + q^2 d\varphi'^2 + dt^2 \ldots\ldots (a);$$

et à cause que $\sin M' = \frac{q d\varphi'}{ds}$, on a pour équation différentielle de

la loxodromie,

$$\sin^2 M' \, (dq^2 + q^2 d\varphi'^2 + dt^2) = q^2 d\varphi'^2;$$

l'angle M' qui est ici le rumb de vent, étant constant pour toute l'étendue de cette ligne. De là on tire

$$d\varphi' = \frac{\operatorname{tang} M' \sqrt{dq^2 + dt^2}}{q} \ldots\ldots\ldots (b);$$

et après la substitution de cette valeur dans l'équation (a), l'on obtient

$$ds = \frac{1}{\cos M'} \sqrt{dq^2 + dt^2};$$

ou encore, parceque $t = b \sin \psi'$, $q = a \cos \psi'$ et $a^2 = b^2 (1 + \epsilon)$, on a

$$ds = \frac{b d\psi'}{\cos M'} \sqrt{1 + \epsilon \sin^2 \psi'} \ldots\ldots\ldots\ldots (a'),$$

$$d\varphi' = \frac{b \operatorname{tang} M' d\psi'}{a \cos \psi'} \sqrt{1 + \epsilon \sin^2 \psi'} \ldots\ldots\ldots (b').$$

Ces deux équations, qui donnent les solutions des problèmes relatifs à la loxodromie, s'intègrent par les séries. Si donc l'on développe la quantité radicale $\sqrt{1 + \epsilon \sin^2 \psi'}$ jusques à la première puissance de ϵ seulement, et que l'on ait égard à ce que $\sin^2 = \frac{1 - \cos 2}{2}$; on trouvera d'abord

$$ds = \frac{b}{\cos M'} \left[d\psi' + \tfrac{1}{4} \epsilon (1 - \cos 2\psi') \, d\psi' \right],$$

$$d\varphi' = \frac{b}{a} \operatorname{tang} M' \left[\frac{d\psi'}{\cos \psi'} + \tfrac{1}{2} \epsilon \frac{(1 - \cos^2 \psi') \, d\psi'}{\cos \psi'} \right];$$

et ensuite

$$s = \frac{b}{\cos M'} \left(\psi' \mp \tfrac{1}{4} \epsilon \psi' - \tfrac{1}{8} \epsilon \sin 2\psi' \right) + \text{const.} \ldots (a''),$$

$$\varphi' = \frac{b}{a} \operatorname{tang} M' \left[\left(1 + \tfrac{1}{2}\epsilon\right) \log \operatorname{tang} \left(50^\circ + \tfrac{1}{2}\psi'\right) - \tfrac{1}{2} \epsilon \sin \psi' \right] + \text{const.}$$

ou

$$\varphi' = \operatorname{tang} M' \left[\log \operatorname{tang} \left(50^\circ + \tfrac{1}{2}\psi'\right) - \tfrac{1}{2} \epsilon \sin \psi' \right] + \text{const.} \ldots (b'').$$

Dans la première équation (a''), la constante se détermine en remarquant qu'à l'origine de la ligne s, on a ψ au lieu de ψ'; ainsi

$$s = \frac{b}{\cos M'}\left[\psi' - \psi + \frac{1}{4}\epsilon(\psi' - \psi) - \frac{1}{8}\epsilon(\sin 2\psi' - \sin 2\psi)\right],$$

ou, en représentant par ξ ce que devient s lorsque $\epsilon = 0$, et remplaçant $\sin 2\psi' - \sin 2\psi$ par sa valeur $2\cos(\psi' + \psi)\sin(\psi' - \psi)$, on a

$$s = \xi + \frac{1}{4}\epsilon\xi - \frac{1}{4}\frac{b\epsilon}{\cos M'}\cos(\psi' + \psi)\sin(\psi' - \psi),$$

formule dans laquelle $\xi = \frac{b}{\cos M'}(\psi' - \psi)$, et qui donne la longueur de la loxodromie, connaissant le rumb de vent M', ainsi que les latitudes réduites des points de départ et d'arrivée.

La constante de la seconde équation (b'') se détermine par une considération analogue; en effet, à l'origine de s, la longitude φ' devient φ, et la latitude réduite ψ' se change en ψ (n° 24); parconséquent $\varphi' - \varphi$, ou

$$\Delta\varphi = \operatorname{tang} M'\left[\log\frac{\operatorname{tang}(50^\circ + \frac{1}{2}\psi')}{\operatorname{tang}(50^\circ + \frac{1}{2}\psi)} - \epsilon\cos\frac{1}{2}(\psi' + \psi)\sin\frac{1}{2}(\psi' - \psi)\right];$$

mais si l'on désigne par ϖ ce que $\Delta\varphi$ devient lorsque $\epsilon = 0$, c'est-à-dire, si l'on fait $\varpi = \operatorname{tang} M' \log\frac{\operatorname{tang}(50^\circ + \frac{1}{2}\psi')}{\operatorname{tang}(50^\circ + \frac{1}{2}\psi)}$, on a simplement

$$\Delta\varphi = \varpi - \epsilon\operatorname{tang} M'\cos\frac{1}{2}(\psi' + \psi)\sin\frac{1}{2}(\psi' - \psi);$$

formule à l'aide de laquelle on détermine la différence de longitude des extrémités de la loxodromie, lorsque le rumb de vent et les latitudes réduites des extrémités de cette ligne sont connus.

Il n'est pas de mon sujet de résoudre tous les problèmes de Navigation qui trouvent leurs solutions dans l'analyse précédente : j'ai seulement voulu faire voir le parti que l'on pouvait tirer de la théorie du n° 24.

Propriété particulière de la ligne loxodromique.

54. Je terminerai ce chapitre en prouvant une propriété très-curieuse de la loxodromie tracée sur une sphère ; c'est que sa projection stéréographique sur le plan de l'équateur (le point de vue étant au pôle) est une spirale logarithmique : or cette propriété dérive de cette autre, savoir : *Dans la projection de Ptolémée, l'angle de deux lignes quelconques tracées sur la sphère, ne diffère point de sa perspective*, et c'est ce dont il est facile de se rendre raison par la Géométrie élémentaire ; mais pour démontrer analytiquement cette dernière propriété, j'observerai d'abord que toute tangente à la surface de la sphère, peut être considérée comme la commune section du plan tangent, de celui d'un grand cercle, et d'un autre plan passant par le point de vue.

Cela posé, soit

$$x^2+y^2+z^2=r^2\ldots\ldots(1)$$

l'équation de la sphère ; celles de la tangente que l'on considère sont, en désignant par $x'y'z'$ les coordonnées d'un point donné de cette ligne,

$$\left.\begin{array}{l} x-x'=a(z-z') \\ y-y'=b(z-z') \end{array}\right\}\ldots\ldots(2);$$

le plan d'un grand cercle assujéti à passer par ce point aura pour équation

$$z-z'=A(x-x')+B(y-y')\ldots.(3).$$

Pareillement le plan passant par le point de vue $x''y''z''$ et par le premier point $x'y'z'$, aura pour équation

$$z'-z''=M(x'-x'')+N(y'-y'')\ldots\ldots(4).$$

D'ailleurs l'équation aux différentielles partielles d'un plan tangent à une surface courbe quelconque, assujéti de même à passer par le

point $x'y'z'$, étant

$$z-z'=\left(\frac{dz}{dx}\right)(x-x')+\left(\frac{dz}{dy}\right)(y-y')\ldots.(5),$$

on tire de la sphère (1),

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=-\frac{x}{z},\quad \left(\frac{dz}{dy}\right)=-\frac{y}{z};$$

ainsi l'équation du plan tangent est

$$z-z'=-\frac{x}{z}(x-x')-\frac{y}{z}(y-y')\ldots..(5').$$

Or une combinaison bien simple des équations (2), (3); (2), (4); (2), (5'), (en diminuant d'abord dans (4) toutes les variables d'un accent), fournit ces trois relations

$$aA+bB=1,$$
$$aM+bN=1,$$
$$ax+by=-z;$$

qui expriment que la tangente proposée est dans chacun des plans (3), (4), (5'), et desquelles on tire

$$a=\frac{y+Bz}{Ay-Bx},\quad b=-\frac{x+Az}{Ay-Bx};$$

Mais pour simplifier les calculs sans nuire à la généralité de la démonstration, supposons que le point donné $x'y'z'$ soit le point de contact même, par lequel passe le plan des xz; dans ce cas, $y'=0$, et puisque le point de vue $x''y''z''$ est sur la sphère à l'extrémité du rayon perpendiculaire au plan de projection xy, on a

$$x''=y''=0 \quad \text{et} \quad z''=-r;$$

d'où il est aisé de conclure

$$a=-\frac{z'}{x'};\quad b=\frac{x'+Az'}{Bx'};$$

$$M=\frac{z'-z''}{x'}=\frac{z'+r}{x'},\quad N=\frac{B[x'^2+(z'-z'')z']}{(x'+Az')x'}=\frac{B[x'^2+(z'+r)z']}{(x'+Az')x'};$$

ou encore

$$M = \frac{z'}{x'} + \frac{r}{x'}, \quad N = \frac{B\left[1 + \left(\frac{z'}{x'} + \frac{r}{x'}\right)\frac{z'}{x'}\right]}{\left(1 + \frac{Az'}{x'}\right)}.$$

Ces deux dernières expressions peuvent être rendues indépendantes des coordonnées $x'z'$ et du rayon r de la sphère ; car l'équation de la trace du plan (3) sur celui de xz étant $z = Ax$, on a

$$A = \frac{z'}{x'},$$

et il est clair, en outre, que le triangle rectangle $rx'z'$ donne

$$\frac{r}{x'} = \sqrt{1 + A^2},$$

puisque A est la tangente trigonométrique de l'angle que cette trace fait avec l'axe des x' ; partant

$$M = A + \sqrt{1 + A^2}, \quad N = B\left(\frac{A + \sqrt{1 + A^2}}{\sqrt{1 + A^2}}\right),$$

et l'équation (4) du plan projetant devient

$$z + r = (A + \sqrt{1 + A^2})\,x + B\left(\frac{A + \sqrt{1 + A^2}}{\sqrt{1 + A^2}}\right)y \ldots. (4').$$

La projection stéréographique de la tangente située dans ce plan, s'obtiendra en faisant $z = 0$ dans ce résultat ; et la tangente trigonométrique de l'angle θ qui résulte de cette projection et de l'axe des x, sera évidemment

$$\text{tang}\,\theta = \frac{M}{N} = -\frac{\sqrt{1 + A^2}}{B}.$$

Pareillement pour une autre tangente à la sphère, menée de même par le point $x'y'z'$, et représentant l'intersection des plans $z - z' = A(x - x') + B'(y - y')$ et $z - z' = M(x - x') + N'(y - y')$, on aura

$$\text{tang}\,\theta' = \frac{M}{N'} = -\frac{\sqrt{1 + A^2}}{B'};$$

ainsi

$$\text{tang}\,(\theta - \theta') = \frac{(B - B')\sqrt{1 + A^2}}{A^2 + BB' + 1}.$$

Maintenant soit V l'inclinaison des deux tangentes formant l'angle de deux courbes quelconques tracées sur la sphère, angle qui est en même temps celui des deux plans $z = Ax + By$, $z = Ax + B'y$, dans lesquels se trouvent ces tangentes; on a, comme l'on sait,

$$\cos V = \frac{A^2 + BB' + 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + 1}\,\sqrt{A^2 + B'^2 + 1}},$$

ou

$$\text{tang}\, V = \frac{(B - B')\sqrt{1 + A^2}}{A^2 + BB' + 1};$$

donc

$$\text{tang}\,(\theta - \theta') = \text{tang}\, V, \quad \text{et} \quad \theta - \theta' = V;$$

résultat qui prouve la proposition énoncée, puisque $\theta - \theta'$ est la projection stéréographique de l'angle V.

Je ne parlerai point des diverses applications que l'on peut faire de cette méthode analytique, qui renferme le principe fondamental de la perspective linéaire, parceque l'on peut consulter à ce sujet la deuxième édition de mon *Recueil de diverses propositions de Géométrie*, page 342, où l'on trouvera d'ailleurs une autre démonstration assez simple de la propriété actuelle.

Il me reste à prouver la première propriété énoncée, ce qui ne présente aucune difficulté; car la spirale logarithmique coupant tous ses rayons vecteurs sous un même angle, et dans la projection stéréographique dont il s'agit en ce moment, les méridiens étant ces rayons eux-mêmes, on doit naturellement inférer de là et de la proposition précédente, qu'une ligne loxodromique est une telle spirale sur la carte.

FIN.

ERRATA.

Page 8, ligne 15, courbe, *lisez* courbure.
— 18, équation (6), au dénominateur, au lieu de l'exposant $\frac{1}{2}$, *lisez* $\frac{3}{2}$.
— 27, ligne 8 en remontant, $\frac{q''}{3}$, *lisez* $\frac{q''}{4}$.
— 34, ligne 9, au premier dénominateur, *restituez* le facteur R'.
— 35, ligne 12, *effacez* respectivement.
— 83, ligne 4 en remontant, au dénominateur, sin D, *lisez* sin D'.
— 88, ligne 12, l'azimuth approchée, *lisez* l'azimnth approché.

Supplément à l'errata du Traité de Topographie:

Page 25, lignes 6 et 8 en remontant, aux numérateurs, rr', *lisez* $4rr'$.
— 38, ligne 3, étant proportionnelles, *lisez* étant réciproquement proportionnelles.

Ibid., *du Traité de Géodésie;*

Page 74, ligne 4, la vis V', *lises* les vis $V'V''$.

Explication

Explication et usage de la Table I.

La première partie de cette Table a pour argument la latitude, et s'étend depuis 30° jusqu'à 70°, comme on le voit dans la première colonne : elle donne les valeurs de θ qui sont les amplitndes des arcs de parallèle sur la carte, répondant à un grade de longitude sur le globe. Ces valeurs s'obtiennent à l'aide de la méthode du n° 20, et composent la deuxième colonne de la Table. La troisième colonne comprend les différences premières des nombres de la seconde ; et la quatrième colonne, les différences secondes de ces mêmes nombres, ou, ce qui est de même, les différences des différences premières. Enfin, les signes de ces différences sont indiqués dans les titres de ces dernières colonnes.

Au moyen des valeurs de $\Delta\theta$ et $\Delta^2\theta$, on a formé la deuxième partie de la Table, en s'imposant la condition d'interpoler de décigrades en décigrades, c'est-à-dire de calculer les valeurs de θ pour 30°,1, 30°,2, 30°,3........ de latitude et 1° de longitude, et d'employer à cet effet des différences premières et secondes. Or il est démontré dans les *Traités du Calcul aux Différences finies*, que si l'on a nne suite de quantités θ θ_1 θ_2 θ_3...... liées entre elles d'une manière quelconque et qui répondent aux indices 0, 1, 2, 3... considérés comme les abscisses d'une courbe eyant respectivement θ θ_1 θ_2 θ_3..... pour ordonnées, et que l'on veuille partager les intervalles entre ces dernières lignes en h parties égales, on a, en désignant par $\delta\theta$, $\delta^2\theta$ les différences premières et secondes de l'ordonnée θ, eu égard au nonvel indice 1,

$$\delta\theta = \frac{1}{h}\Delta\theta + \frac{1(1-h)}{h.2h}\Delta^2\theta + \ldots\ldots;$$

$$\delta^2\theta = \frac{1}{h^2}\Delta^2\theta + \ldots\ldots$$

ou bien à cause de la supposition de $h = 10$;

$$\delta\theta = \frac{1}{10}\Delta\theta - \frac{9}{200}\Delta^2\theta,$$

$$\delta^2\theta = \frac{1}{100}\Delta^2\theta.$$

Avec ces nouvelles différences premières et secondes $\delta\theta$, $\delta^2\theta$, on effectuera l'interpolation ainsi que nous l'enseignerons bientôt.

Remarquons d'abord que pour la facilité du calcul, on peut écrire la valeur ci-dessus de $\delta\theta$ ainsi qu'il suit,

$$\delta\theta = \frac{1}{10}\Delta\theta - \frac{1}{20}\Delta^2\theta + \frac{1}{200}\Delta^2\theta.$$

C'est cette formule et celle-ci, $\delta''\theta = \frac{1}{100}\Delta''\theta$, qui ont été employées pour calculer les nombres de la deuxième partie de la Table. Par exemple, au-dessous du nombre 30°, on voit $\frac{1}{10}\Delta\theta = 0{,}00026149$, c'est-à-dire $\frac{1}{10}$ du premier nombre de la deuxième colonne de la première partie de cette Table; viennent ensuite les termes $-\frac{1}{20}\Delta''\theta$ et $+\frac{1}{200}\Delta''\theta$ fournis par le premier nombre de la colonne des $\Delta''\theta$; enfin les valeurs de $\delta\theta$ et de $\delta''\theta$.

Veut-on maintenant interpoler neuf termes entre 30° et 31°; ce sera au moyen de la formule suivante,

$$\theta^{(i)} = \theta + i\delta\theta + (i-1)\,\frac{i}{2}\,\delta''\theta,$$

dans laquelle i indique le rang du terme que l'on cherche. Par exemple, on demande la valeur de θ correspondante à la latitude 30°,5; dans ce cas, $i = 5$, et

$$\begin{aligned}\theta^{(i)} = \theta^{v} &= 0^{c},67811470 + 0^{c},00026622 \times 5 - 10 \times 0^{c},00000105\\ &= 0^{c},67943530.\end{aligned}$$

C'est ce que donne en effet la troisième partie de la Table, laquelle est formée de la manière suivante :

Vis-à-vis la latitude 30° se trouvent les valeurs de θ, $\delta\theta$ et $\delta''\theta$; les nombres de la colonne des différences 1res s'obtiennent par l'addition continuelle de la valeur de $\delta''\theta$ prise avec son signe, et du premier nombre de cette colonne; et une des valeurs quelconques de θ se trouve en ajoutant à sa valeur précédente, le nombre correspondant pris dans la troisième colonne. Ce procédé se continue jusqu'à 32° inclusivement, et procure toutes les valeurs de θ comprises entre celles qui répondent à 30° et 32° : comme par cette interpolation, l'on reproduit, du moins à très-peu de chose près, les valeurs de θ correspondantes à 31° et 32°, on est à même de juger, par leur comparaison avec celles qui ont été calculées directement, si les termes intercalés sont exacts, et si l'on peut se permettre de négliger, comme nous l'avons fait, les différences troisièmes.

TABLE I.

PREMIÈRE PARTIE.

Amplitudes des arcs de parallèle sur la projection modifiée de Flamstéed, pour 1° de longitude.

Argument : *Latitude.*

Latit.	Angle θ.	+ Δ θ	— Δ ²θ.	Latit.	Angle θ.	— Δ θ	+ Δ ²θ
30°	0,6781147	0,0026149	0,0007052	50°	0,7071068	0,0000879	0,0001796
31	0,6807296	0,0025097	1076	51	0,7070189	0,0002675	1857
32	0,6832393	0,0024021	1102	52	0,7067514	0,0004532	1918
33	0,6856414	0,0022919	1129	53	0,7062982	0,0006450	1987
34	0,6879333	0,0021690	1155	54	0,7056532	0,0008437	2058
35	0,6901123	0,0020635	1184	56	0,7048095	0,0010495	2134
36	0,6921758	0,0019451	1213	56	0,7037600	0,0012629	2214
37	0,6941209	0,0018238	1245	57	0,7024971	0,0014843	2302
38	0,6959447	0,0016993	1275	58	0,7010128	0,0017145	2394
39	0,6976440	0,0015718	1310	59	0,6992983	0,0019539	2492
40	0,6992158	0,0014408	1343	60	0,6973444	0,0022031	2600
41	0,7006566	0,0013065	1379	61	0,6951413	0,0024631	2713
42	0,7019631	0,0011686	1419	62	0,6926782	0,0027344	2837
43	0,7031317	0,0010267	1456	63	0,6899438	0,0030181	2969
44	0,7041584	0,0008811	1499	64	0,6869257	0,0033150	3113
45	0,7050395	0,0007312	1542	65	0,6836107	0,0036263	3267
46	0,7057707	0,0005770	1587	66	0,6799844	0,0039530	3436
47	0,7063477	0,0004183	1636	67	0,6760314	0,0042966	3619
48	0,7067660	0,0002547	1686	68	0,6717348	0,0046585	[illegible]
49	0,7070207	0,0000861		69	0,6670763	0,0050404	
50	0,7071068			70	0,6620359		

TABLE I.

DEUXIÈME PARTIE.

Argument : *Latitude.*

diff. 1re. diff. 2e.	Latitude.	Latitude.	Latitude.	diff. 1re. diff. 2e.	Latitude.	Latitude.	Latitude.
	30°	32°	34°		50°	52°	54°
	0,00026149 +0,00000526 +0,00026675 −0,00000053	0,00024021 +0,00000551 +0,00024572 −0,00000055	0,00021790 +0,00000578 +0,00022368 −0,00000058		−0,00000879 −0,00000898 −0,00001777 +0,00000090	−0,00004532 −0,00000959 −0,00005491 +0,00000096	−0,00008437 −0,00001029 −0,00009466 +0,00000103
$\delta\theta$ $\delta^2\theta$	+0,00026622 −0,00000105	+0,00024517 −0,00000110	+0,00022310 −0,00000115	$\delta\theta$ $\delta^2\theta$	−0,00001687 +0,00000180	−0,00005395 +0,00000192	−0,00009353 +0,00000206
	36	38	40		56	58	60
	0,00019451 +0,00000606 +0,00020057 −0,00000061	0,00016993 +0,00000637 +0,00017630 −0,00000064	0,00014408 +0,00000671 +0,00015079 −0,00000067		−0,00012629 −0,00001107 −0,00013736 +0,00000111	−0,00017145 −0,00001197 −0,00018342 +0,00000120	−0,00022031 −0,00001300 −0,00023331 +0,00000130
$\delta\theta$ $\delta^2\theta$	+0,00019996 −0,00000121	+0,00017566 −0,00000127	+0,00015012 −0,00000134	$\delta\theta$ $\delta^2\theta$	−0,00013625 +0,00000221	−0,00018222 +0,00000239	−0,00023201 +0,00000260
	42	44	46		62	64	66
	0,00011686 +0,00000709 +0,00012395 −0,00000071	0,00008811 +0,00000749 +0,00009560 −0,00000075	0,00005770 +0,00000793 +0,00006563 −0,00000079		−0,00027344 −0,00001418 −0,00028762 +0,00000142	−0,00033150 −0,00001556 −0,00034706 +0,00000156	−0,00039530 −0,00001718 −0,00041248 +0,00000172
$\delta\theta$ $\delta^2\theta$	+0,00012324 −0,00000142	+0,00009485 −0,00000150	+0,00006484 −0,00000159	$\delta\theta$ $\delta^2\theta$	−0,00028620 +0,00000284	−0,00034550 +0,00000311	−0,00041076 +0,00000344
	48				68		
	0,00002547 +0,00000843 +0,00003390 −0,00000084				−0,00046585 −0,00001909 −0,00048494 +0,00000191		
$\delta\theta$ $\delta^2\theta$	+0,00003306 −0,00000169			$\delta\theta$ $\delta^2\theta$	−0,00048303 +0,00000382		

TABLE I.

TROISIÈME PARTIE.

Argument : ***Latitude.***

Latit.	Angle θ.	$\delta\theta$ ou diff. 1res.	$\delta^2\theta$ ou diff. 2mes.	Latit.	Angle θ.	$\delta\theta$ ou diff. 1res.	$\delta^2\theta$ ou diff. 2mes.
30°,0	0°,67811470	+0,00026622	−0,00000105	32°,0	0°,68323930	+0,00024517	−0,00000110
1	0,67838092	26517		1	0,68348447	24407	
2	0,67864609	26412		2	0,68372854	24297	
3	0,67891021	26307		3	0,68397151	24187	
4	0,67917328	26202		4	0,68421338	24077	
5	0,67943530	26090		5	0,68445415	23967	
6	0,67969627	25992		6	0,68469382	23857	
7	0,67995619	25887		7	0,68493239	23747	
8	0,68021506	25782		8	0,68516986	23637	
9	0,68047298	25677		9	0,68540623	23527	
31,0	0,68072965	25572		33,0	0,68564150	23417	
1	0,68098539	25467		1	0,68587567	23307	
2	0,68124005	25362		2	0,64610874	23197	
3	0,68149366	25257		3	0,68634071	23087	
4	0,68174623	25152		4	0,68657158	22977	
5	0,68199775	25047		5	0,68680135	22867	
6	0,68224822	24942		6	0,68703002	22757	
7	0,68249764	24837		7	0,98725759	22647	
8	0,68274601	24732		8	0,68748406	22537	
9	0,68299333	24627		9	0,68770943	22427	
32,0	0,68323960			34,0	0,68793370		

TABLE II.

Modèle du calcul abrégé des coordonnées d'un point quelconque de la projection modifiée de Flamstéed.

VALEUR du rayon d'un parallèle, $R = t \pm \sigma$.	AMPLITUDE d'un arc de parallèle, $\theta = p \cos L \left(\frac{♑}{R}\right)$.	LOGARITHMES du rayon de plus grande courbure, ou log ♑.
nombre const. $t = 6385290^{m}$	log p ou diff. de longitude.	Facteur de la Table IX (*Géodésie*).
table III, 2e partie de la *Topogr.* $\pm \sigma$	log cos L	log constant 1,8038841
Somme $= R$	log ♑	Somme ou log ♑.
log R = ...	...... compl log R	
	Somme ou log θ	
	θ	
	$\frac{1}{2}\theta$.	

CALCUL de l'ordonnée y.	CALCUL de l'abscisse x.	*OBSERVATIONS.*
log R	log y	On prend le signe supérieur pour la partie boréale, et le signe inférieur pour la partie australe.
log sin θ	log tang $\frac{1}{2}\theta$	Les valeurs de x et y sont celles des coordonnées d'un point quelconque de la carte, et se comptent à partir du centre du développement.
Somme ou log y.	Somme ou log H	
	$\pm H$	
	$+ \sigma$	
	Somme ou x.	

TABLE III.

les de M. DELAMBRE, les positions



TABLE DES MATIÈRES.

SUPPLÉMENT

AU IIᵉ LIVRE DU TRAITÉ DE TOPOGRAPHIE.

THÉORIE DES PROJECTIONS DES CARTES.